Motifs des fibrés en quadriques et jacobiennes intermédiaires relatives des paires K3-Fano

Johann Bouali

UNIVERSITE DE BOURGOGNE
UFR Sciences et Techniques
Institut de Mathématiques de Bourgogne

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Bourgogne
Discipline : Mathématiques

Présentée par
Johann BOUALI

Motifs des fibrés en quadriques et jacobiennes intermédiaires relatives des paires K3-Fano

---

Présentée le 6 novembre 2015 devant la commission d'examen

Samuel BOISSIERE	Professeur à l'Université de Poitiers	Rapporteur
Pedro DEL ANGEL	Investigador Titular, CIMAT	Rapporteur
Adrien DUBOULOZ	Chargé de Recherches à l'Université de Bourgogne	Membre
Laurent GRUSON	Professeur à l'Université de Versailles-St Quentin	Membre
Dimitri MARKOUCHEVITCH	Professeur à l'Université Lille 1	Co-directeur de thèse
Johannes NAGEL	Professeur à l'Université de Bourgogne	Directeur de thèse
Chris PETERS	Professeur à l'Université d'Eindhoven	Membre

Remerciement.

Cette thèse a été financée par le contrat no. 2010-9201AAO047S00752 de la Région de Bourgogne. Je remercie la région pour le soutien financier.

Motifs des fibrés en quadriques et jacobiennes intermédiaires relatives des paires $K3$-Fano

Johann Bouali

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Cette thèse a pour objectif l'application de certains outils de la théorie des cycles algébriques, notamment les motifs et les jacobiennes intermédiaires, à des classes particulières de variétés algébriques. Elle comporte deux parties. La première partie est consacrée aux motifs purs, le résultat principal étant le calcul du motif d'un fibré en quadriques. L'objet de la deuxième partie concerne une étude des fibrations lagrangiennes sur des variétés holomorphiquement symplectiques, obtenues comme les jacobiennes intermédiaires relatives de familles de variétés de Fano de dimension 3 et, éventuellement, leurs compactifications partielles.

0.1 Partie 1

Les motifs ont été introduits à la fin des années 60 par Grothendieck, dans le but de trouver une théorie de cohomologie universelle. La catégorie des motifs de Chow purs (construite par Grothendieck) est définie de la façon suivante.

Une correspondance entre deux variétés projectives lisses complexes X et Y est la classe d'un cycle algébrique sur le produit $X \times Y$ modulo équivalence rationnelle, i.e. un élément de $\mathrm{CH}\,(X \times Y)$. Si X est de dimension d, une correspondance de degré p de X vers Y est un élément de $\mathrm{CH}^{\,d+p}(X \times Y)$. On peut définir une loi de composition sur les correspondances comme suit : si Γ_1 est une correspondance de X vers Y et Γ_2 une correspondance de Y vers Z, on pose

$$\Gamma_2 \circ \Gamma_1 = p_{XZ*}(p_{XY}^*\Gamma_1 \cdot p_{YZ}^*\Gamma_2),$$

où p_{XZ} est la projection de $X \times Y \times Z$ vers $X \times Z$ et de même pour p_{XY} et p_{XZ}, et le point désigne le produit d'intersection sur $X \times Y \times Z$. Un projecteur sur X est une correspondance p de degré 0 de X vers X qui vérifie $p \circ p = p$. Un motif de Chow (effectif) est un couple (X, p), où p est un projecteur sur X. De même on peut définir des motifs modulo une autre relation d'équivalence adéquate par exemple l'équivalence homologique ou numérique.

Une correspondance Γ de X vers Y induit un homomorphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\Gamma_* : H(X, \mathbb{Q}) \to H(Y, \mathbb{Q})$ sur la cohomologie défini par

$$\Gamma_*\alpha = p_{Y*}(p_X^*\alpha \cdot [\Gamma]),$$

où le point désigne le cup produit. De même, Γ induit un homomorphisme $\Gamma_* : \mathrm{CH}\,(X) \to \mathrm{CH}\,(Y)$ sur les groupes de Chow. Plus précisément, si Γ est une correspondance de degré d de X vers Y, alors Γ induit un homomorphisme $\Gamma_* : H^k(X, \mathbb{Q}) \to H^{k+2d}(Y, \mathbb{Q})$ et un homomorphisme $\Gamma_*\, \mathrm{CH}^{\,r}(X) \to \mathrm{CH}^{\,r+d}(Y)$. En particulier un projecteur p de X induit des endomorphismes de $H^k(X, \mathbb{Q})$ et de $\mathrm{CH}^{\,k}(X)$.

Par la suite, la théorie des motifs était développée dans des travaux de nombreux mathématiciens dont Beilinson, Bloch, Deligne, Hanamura, Manin, Milne et Murre. Plusieurs bonnes propriétés de la catégorie des motifs dépendent de la conjecture de Bloch et Beilinson (et indépendamment Murre) qui est l'existence d'une filtration décroissante finie sur les groupes de Chow des variétés projectives lisses, compatible avec l'action des correspondances, dont les graduées sont contrôlées par la cohomologie :

Conjectures. *(Bloch-Beilinson-Murre [35]) Pour une variété projective lisse X de dimension n, il existe une filtration décroissante F^ν $(\nu \geq 0)$ sur $\mathrm{CH}^{\,l}(X)$, $0 \leq l \leq n$ satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(i) $F^0 = \mathrm{CH}^l(X)$, $F^1 = \mathrm{CH}^l_{\hom}(X)$.
(ii) $F^r \cdot F^s \subset F^{r+s}$, *où le point désigne le produit d'intersection.*
(iii) F^* *est fonctorielle pour les morphismes* $f : X \to Y$.
(iv) Les composantes de Künneth $[\Delta_X]^{2n-j,j} \in H^{n,n}(X \times X, \mathbb{Q})$ *de la classe de cohomologie de la diagonale sont algébriques, données par les classes de projecteurs* p_j, *et* $\mathrm{Gr}^{\nu}_{F^*}\mathrm{CH}^l(X)$ *ne dépend que du motif* $h^{2l-\nu}(X) = (X, [p_{2l-\nu}]_{\hom})$ *modulo l'équivalence homologique, i.e.* $p_{j*}\mathrm{Gr}^{\nu}_{F^*}\mathrm{CH}^l(X) = \delta_{j,2l-\nu}\mathrm{Id}_{\mathrm{Gr}^{\nu}_{F^*}\mathrm{CH}^l(X)}$.
(v) $F^m = 0$ *pour* $m >> 0$ *(version faible) ou* $F^{l+1} = 0$ *(version forte).*

Remarque 0.1.1. *Pour (iv), on notera que (i) et (ii) pour* $X \times X$ *et (iii) impliquent qu'une correspondance* $\Gamma \in \mathrm{CH}^n_{\hom}(X \times X)$ *agit par zéro sur* $\mathrm{Gr}^{\nu}_{F^*}\mathrm{CH}^l(X)$.

Jannsen [35] montre qu'une filtration satisfaisant aux points (i) à (iv) est unique. Une filtration satisfaisant aux points (i) à (iv) existe toujours (cf. S.Saito) mais on ne sait pas si elle s'arrête, i.e. si elle vérifie le point (v).

Dans [54], Murre a introduit la notion de décomposition de Chow–Künneth.

Définition 0.1.2. *(Murre) [55, Def. 6.1.1, p. 67]*

Soit X *une variété projective lisse de dimension* n. *On dit que* X *a une décomposition de Chow–Künneth si il existe, pour* $0 \leq j \leq 2n$, *des cycles* $p_j \in \mathrm{CH}_n(X \times X)$ *tels que*

1. $p_j p_k = \delta_{j,k} p_j$ *i.e.* p_j *sont des projecteurs, deux à deux orthogonaux,*
2. $\sum_{j=0}^{2n} p_j = \Delta_X \in \mathrm{CH}_n(X \times X)$, *où* Δ_X *désigne la classe de la diagonale de* $X \times X$,
3. $[p_j]_{\hom} = [\Delta_X]^{2n-j,j}$, *où* $[\Delta_X]^{2n-j,j} \in H^{n,n}(X \times X, \mathbb{Q})$ *désigne la* $j^{\text{ième}}$ *composante de Künneth de la classe de cohomologie de la diagonale. De façon équivalente, l'action de* p_j *sur la cohomologie est* $p_{j*|H^k(X)} = \delta_{j,k}\mathrm{Id}_{H^k(X)}$.

Définition 0.1.3. *On dit qu'une décomposition de Chow–Künneth d'une variété projective lisse* X *est auto-duale si, pour tout indice* j *tel que* $0 \leq j \leq 2d_X$, *on a* $p_j(X) = {}^t p_{2d_X - j}(X)$, *où* ^{t} *désigne le transposé.*

Donnons maintenant des exemples de variétés projectives lisses sur k admettant une décomposition de Chow–Künneth :

1. Les courbes projectives lisses satisfont aux conjectures de Murre.
2. Pour les surfaces projectives lisses, Murre a construit une décomposition de Chow–Künneth via la construction du motif de Picard et d'Albanese. Pour plus de détails voir [55].

Il a ensuite énoncé quatre conjectures pour chaque variété projective lisse :

Conjectures. *([51, Sec. 4.3.2.1, p. 149], [55, Sec. 7.2 p. 85]) Pour une variété projective lisse* X *de dimension* n *:*

I *(Existence)* X *admet une décomposition de Chow–Künneth donnée par des projecteurs orthogonaux* $p_j \in \mathrm{CH}_{d_X}(X \times X)$, *pour* $0 \leq j \leq 2n$.

II *Pour tout* $0 \leq l \leq n$, *les projecteurs* $p_0, \ldots, p_{l-1}$ *et* $p_{2l+1}, \ldots, p_{2n}$ *agissent par zéro sur* $\mathrm{CH}^l(X)$.

III *Pour tout* $0 \leq l \leq n$, $\ker(p_{2l}) = \mathrm{CH}^l(X)_{\hom}$. *(Notons que clairement* $\ker(p_{2l}) \subset \mathrm{CH}^l(X)_{\hom}$*).*

IV *Pour tout* $0 \leq l \leq n$, *la filtration sur* $\mathrm{CH}^l(X)$ *définie par* $F^p\mathrm{CH}^l(X) = \ker(p_{2l}) \cap \ker(p_{2l-1}) \cap \ldots \cap \ker(p_{2l-p+1})$ *est indépendante du choix de la décomposition de Chow–Künneth.*

Jannsen [35] a plus précisément montré que les conjectures de Murre pour toutes variétés projectives lisses sont équivalentes à l'existence de la filtration de Bloch–Beilinson.

Plus généralement, on peut définir des motifs au-dessus d'une base S. Soit S une variété quasi-projective complexe et soient X et Y des variétés quasi-projectives lisses complexes munies d'un morphisme propre (non nécessairement lisse) vers S. Une correspondance relative de X vers Y est un élément de l'anneau de Chow $\mathrm{CH}(X \times_S Y)$ du produit fibré $X \times_S Y$ au-dessus de S. Corti et Hanamura ont défini une loi de composition pour les correspondances relatives en utilisant l'intersection raffinée de Fulton ([24]). Ils ont montré également qu'une correspondance relative de X vers X sur S agit sur l'image directe $Rf_*\mathbb{Q}_X$, où $f : X \to S$ est le morphisme structural. Un projecteur relatif est une correspondance relative $p(X/S)$ de degré 0 qui vérifie $p \circ p = p$. Un motif de Chow relatif est un couple $(X, p(X/S))$, où $p(X/S)$ est un projecteur relatif.

De plus, Corti et Hanamura (puis Gordon–Hanamura–Murre [26]) ont conjecturé l'existence d'une décomposition de Chow–Künneth relative :

Définition 0.1.4. *([55]) Soient S une variété quasi-projective complexe, X une variété algébrique lisse complexe de dimension $d_X = n$ et $f : X \to S$ un morphisme projectif. Soit k la dimension de la fibre générique. On dit que f a une décomposition de Chow–Künneth relative au sens faible si il existe $p_i \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$, $0 \leq i \leq 2k$, tels que*

1. *$p_i p_j = \delta_{i,j} p_i$, i.e. p_i sont des projecteurs relatifs, deux à deux orthogonaux,*
2. *$\sum_i p_i = \Delta_X \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$,*
3. *$p_{i*} {}^pR^j f_* \mathbb{Q}_X = \delta_{i,j} \operatorname{Id}_{{}^pR^j f_* \mathbb{Q}_X}$, où ${}^pR^j$ désigne la j^{ieme} cohomologie perverse du complexe $Rf_*\mathbb{Q}$.*

Soient X et S des variétés quasi-projectives complexes, dont X est lisse de dimension $d_X = n$, et $f : X \to S$ un morphisme projectif. Soit k la dimension de la fibre générique. Si f a une décomposition de Chow-Künneth relative donnée par des projecteurs relatifs $p_j \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$, $0 \leq j \leq 2k$, alors on a un isomorphisme de motifs de Chow relatifs $\mathrm{ch}(X/S) = (X, \Delta_X) \simeq \oplus_{j=0}^{2k}(X, p_j)$ (cf. proposition 1.3.16). De plus, si X est projective, $\mathrm{CH}(X) = \oplus_{j=0}^{2k} p_{j*} \mathrm{CH}(X)$.

Plus récemment, Nagel et Saito [56] ont donné une décomposition de Chow–Künneth relative explicite des fibrés en coniques, et en ont déduit le motif des fibrés en coniques au-dessus d'une surface projective lisse. Dernièrement, Vial [77] a montré les conjectures de Murre I, II et III pour les fibrations aux groupe de Chow triviaux (i.e.isomorphe à $\mathbb{Q}$) au-dessus d'une surface projective lisse via une décomposition du motif absolu.

Dans la première partie, on s'intéresse à la description du motif des fibrés en quadriques de dimension relative impaire. Ceci permet de démontrer les conjectures de Murre I, II et III dans le cas où la base est une surface. Dans le cas des familles d'hypersurfaces d'un espace projectif ou plus généralement des fibrés en hypersurfaces, on a une décomposition de Chow–Künneth relative au sens faible (cf. fin du Chapitre 1 pour la preuve, la difficulté étant les versions perverses des théorèmes de Lefschetz faible et fort), mais le projecteur non trivial p_∞ reste mystérieux. Un fibré en hypersurfaces de degré d de dimension relative N étant une variété algébrique irréductible X munie d'un morphisme plat $f : X \to S$ tel que les fibres X_s sont isomorphes à des hypersurfaces de degré d de $\mathbb{P}^{N+1}$, on a alors un fibré ample relatif sur X et donc un plongement relatif $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$, où $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ est un fibré projectif de rang $N+1$. La proposition 1.3.20 et le point (ii) de la remarque 1.3.21 disent que $X \to S$ admet une décomposition de Chow–Künneth relative.

Cela s'applique en particulier aux fibrés en quadriques $f : X \to S$ de dimension relative impaire au-dessus d'une surface. Dans ce, on donne un projecteur non trivial explicite p_∞ qui permet de décrire en détail le motif de X. Ce projecteur est obtenu de la façon suivante : Soit $C \subset S$ la courbe discriminante du fibré en quadriques, i.e. la courbe qui paramètre les quadriques singulières. Pour simplifier l'exposition, on suppose que C est lisse et irréductible. Soit $\pi : \tilde{C} \to C$ le revêtement double qui paramètre les deux familles de m-plans dans une quadrique nodale et soit $\tau : \tilde{C} \to \tilde{C}$ l'involution de ce revêtement. Soit $\rho = I - \tau^* \in \mathrm{CH}_1(\tilde{C} \times_S \times \tilde{C})$ le projecteur de Prym associé à ce revêtement. La restriction de la famille universelle des m-plans $\Gamma \subset F_m(X/S) \times_C X_C$ à une multisection du morphisme $F_m(X/S) \to \tilde{C}$ induit une correspondance γ de degré m de $\tilde{C}$ vers X. On pose alors

$$p_\infty = \gamma \circ \rho \circ \gamma^t.$$

Plus généralement, cette construction s'étend aux courbes singulières et réductibles (voir chapitre 3).

Le théorème principal est le suivant :

Théorème 0.1.5. *Soient $f : X \to S$ un fibré en quadriques de dimension relative impaire $2m-1$, X, S deux variétés projectives lisses sur $\mathbb{C}$, telles que $\dim(S) = 2$, et donc $\dim(X) = n = 2m+1$. Soit $C = \cup_j C_j \subset S$ le discriminant de $f : X \to S$, où les C_j sont les composantes irréductibles. On note $p_{\infty,j}$ la correspondance associée à C_j et $p_\infty = \sum_j p_{\infty,j} \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$. Alors,*

(1) L'orthonormalisation $(\{p_{2i}^N\}_{0 \leq i \leq 2m}, \{p_{\infty,j}^N\}_j)$ par le procédé de Gram–Schmidt de la famille $(\{p_{2i}\}_{0 \leq i \leq 2m}, \{p_{\infty,j}\}_j)$ constitue une décomposition de Chow–Künneth relative de $f : X \to S$.

(2) Cette décomposition de Chow–Künneth relative induit une décomposition de Chow–Künneth absolue de X qui vérifie les conjectures de Murre I, II et III.

La difficulté principale est de montrer que la correspondance p_∞ est un projecteur et qu'on a l'égalité

$$\Delta_X = \sum_i p_{2i}^N + \sum_j p_{\infty,j}^N \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

Cette égalité s'obtient via la description de $\mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ et un argument de nilpotence. On en déduit alors le corollaire suivant :

Corollaire 0.1.6. *On a un isomorphisme de motifs de Chow relatifs, donc a fortiori absolus :*

$$(X, \Delta_X) \tilde{\to} \oplus_i (S, \Delta_S)(-2i) \oplus \oplus_j (N(\tilde{C}_j), \rho_j),$$

où $N(\tilde{C}_j)$ dénote la normalisation de $\tilde{C}_j$.

On construit alors une décomposition de Chow–Künneth absolue de X satisfaisant aux conjectures de Murre I, II, et III via cet isomorphisme de motifs de Chow et en utilisant le cas connu des surfaces projectives lisses.

On a un énoncé analogue dans le cas pair avec un projecteur p_∞ qui est dans ce cas supporté au-dessus de toute la base (cf. chapitre 3).

Remarque 0.1.7. *Un résultat analogue a été obtenu par C. Vial (Voir Chapitre 3).*

0.2 Partie 2

La notion d'une variété irréductible symplectique lisse a été introduite par Beauville (cf. [7] et [8]) dans les années 80 comme une généralisation d'une surface K3 en dimension supérieure.

Définition 0.2.1. — *Une variété symplectique est une variété algébrique normale $X \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$, telle que son lieu lisse X_{reg} possède une structure symplectique, c'est à dire une 2-forme $\omega \in H^0(X_{\mathrm{reg}}, \Omega^2_{X_{\mathrm{reg}}})$ fermée et partout non-dégénérée, i.e. $V(\omega^{\wedge \frac{1}{2}\dim(X)}) = \emptyset \subset X_{\mathrm{reg}}$. La dimension d'une variété symplectique X, $\dim(X) = \dim(T_xX)$ pour $x \in X_{\mathrm{reg}}$, est nécessairement paire et $K_{X_{\mathrm{reg}}}$ est trivial.*

— *Une sous-variété fermée irréductible $Y \subset X$ d'une variété symplectique X munie d'une structure symplectique ω est lagrangienne si $\dim(Y) = \frac{1}{2}\dim(X)$, $Y_0 = Y_{\mathrm{reg}} \cap X_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ et $\omega_{|Y_0} = 0$. Notons que la non-dégénérescence de ω_x en $x \in Y_0 \subset X_{\mathrm{reg}}$ implique que $T_{x_0}Y_0 \subset T_{x_0}X$ est un sous-espace isotrope maximal (de dimension $\frac{1}{2}\dim(X)$).*

— *On dit qu'une variété symplectique X, munie d'une forme symplectique $\omega \in H^0(X_{\mathrm{reg}}, \Omega^2_{X_{\mathrm{reg}}})$, possède des singularités symplectiques si ω se relève à une 2-forme régulière $\tilde{\omega}$ sur une résolution de singularités $\tilde{X} \to X$ de X.*

— *Une variété symplectique irréductible est une variété symplectique complète X, simplement connexe, lisse ou à singularités symplectiques de codimension supérieure ou égale à 4, telle que $\dim H^0(X_{\mathrm{reg}}, \Omega^2_{X_{\mathrm{reg}}}) = 1$.*

Beauville a donné les premiers exemples variétés symplectiques irréductibles lisses, qui constituent deux classes de déformations différentes en toute dimension paire $2n$:

— Les schémas de Hilbert $S^{[n]} = \mathrm{Hilb}^n(S)$, paramétrant les sous-schémas de dimension zéro et de longueur n d'une surface $K3$ S.

— Les variétés de Kummer $K_n(A) = s^{-1}(0) \subset A^{[n+1]}$ sont définies comme les fibres du morphisme $s : A^{[n+1]} \to A$, $s(a_0, \ldots, a_n) = a_0 + \ldots + a_n$, où A est une surface abélienne et $A^{[n+1]} = \mathrm{Hilb}^{n+1}(A)$ est le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas de dimension zéro et de longueur $n+1$ de A.

Par la suite, Mukai (cf. [48]) a mis en évidence, toujours dans les années 80, une forme symplectique sur les espaces de modules de faisceaux semi-stables (pour une polarisation quelconque) sur une surface $K3$ S, donnée par l'accouplement de Yoneda. La variété $S^{[n]}$ peut être identifiée avec l'espace de modules de faisceaux stables de rang un sur S aux classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$. Ces espaces de modules sont projectifs lorsque S est projective.

En outre, ces espaces de modules sont lisses si tous les faisceaux sont stables. Dans le cas où tous les faisceaux paramétrés par un espace de modules sont stables, on obtient une variété symplectique irréductible lisse équivalente par déformation à $S^{[n]}$(cf. [32, Theorem 6.2.16]).

A la fin des années 90 et au début des années 2000, O'Grady a construit deux nouveaux exemples de variétés symplectiques irréductibles lisses donnant deux nouvelles classes de déformations :

— Une désingularisation symplectique d'un espace de modules $\mathcal{M}_4$ de dimension 10 de faisceaux semi-stables de rang 2 sans torsion sur une surface $K3$ aux classes de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 = 4$ (cf. [61]).
— La fibre, de dimension 6, du morphisme d'Albanese d'une désingularisation symplectique d'un espace de modules $\mathcal{M}'_2$ de dimension 10 de faisceaux semi-stables sans torsion sur une surface abélienne aux classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ (cf. [62]).

La méthode de O'Grady donne uniquement deux nouvelles classes de déformation. En effet, pour un espace de modules de faisceaux sur une surface $K3$ ou abélienne, l'alternative suivante se présente : soit il n'existe pas de désingularisation symplectique, soit une telle désingularisation est équivalente par déformation à un des deux exemples connus ([36], [16], [17]). Il y a bien plus de diversité dans le monde des variétés symplectiques irréductibles singulières. On s'intéresse surtout à des exemples qui n'admettent pas de résolution de singularités appartenant à des classes de déformation connues. La méthode de construction étudiée dans cette thèse est susceptible de produire de nouveaux exemples de ce type.

Parmi les variétés symplectiques, sont particulièrement intéressantes celles qui ont une structure d'une fibration lagrangienne. De telles variétés symplectiques sont des espaces de phases de systèmes hamiltoniens complètement intégrables. Un morphisme $f : X \to B$, où X est une variété symplectique de dimension $2n$ et B une variété algébrique de dimension n, est une fibration lagrangienne si f est surjective, à fibres connexes et si la fibre générique de f est une sous-variété lagrangienne de X. Par le théorème de Liouville, les fibres compactes et lisses d'une fibration lagrangienne sont des variétés abéliennes de dimension $n = \frac{1}{2} \dim X$.

Les espaces de modules de faisceaux semi-stables de torsion sur une surface $K3$ S dont les supports sont des courbes admettent une fibration lagrangienne naturelle donnée par l'application de support, qui transforme chaque faisceau en la courbe qui est son support, vue comme un point du schéma de Hilbert paramétrant ces courbes sur S.

En 2008, Markushevich (cf. [43]) a montré que la jacobienne intermédiaire relative de la famille universelle des variétés de Fano de dimension 3 contenant une surface K3 fixée en tant que diviseur anticanonique est une fibration lagrangienne. Dans la perspective d'une recherche de nouveaux exemples de variétés symplectiques, éventuellement singulières, possédant des fibrations lagrangiennes, il est naturel de se poser la question si certaines de ces jacobiennes intermédiaires relatives admettent des compactifications symplectiques. Dans les années 70, Mori et Mukai (cf. [45] et les tableaux de l'Appendice à la fin de cette thèse) ont achevé la classification des variétés de Fano de dimension 3, dont le cas de nombre de Picard 1 avait été fait par Fano et Iskovskikh (voir [33] et des références bibliographiques dedans). Il y en a exactement 105 classes de déformations parmi lesquelles environ la moitié possède une jacobienne intermédiaire non-nulle.

On commence par scruter la liste de Fano–Iskovkikh–Mori–Mukai, en explicitant les constructions des familles universelles $f : \mathcal{X} \to \mathcal{F}^S$ des variété de Fano contenant une surface $K3$ fixée S en tant qu'un diviseur anticanonique, dont les bases $\mathcal{F}^S$ sont à priori des champs algébriques, introduits par Beauville dans [6], dans tous les cas où la jacobienne intermédiaire de la variété de Fano en question est non-nulle. On s'intéresse à une description explicite du champ $\mathcal{F}^S$, à la question de sa représentabilité, ainsi qu'à la question de la compactification de la jacobienne intermédiaire relative $J(\mathcal{X}/\mathcal{F}^S)$. Dans les tableaux de l'Appendice, la colonne $h^{1,2}$ contient le nombre de Hodge $h^{1,2}(X_i)$ de la variété X_i, où i est le numéro d'ordre de X_i dans le tableau. Ce nombre de Hodge est la dimension de la jacobienne intermédiaire $J(X_i)$. On ne s'intéresse qu'aux cas où $h^{1,2}(X_i) \neq 0$. Dans chacun de ces cas, le tableau produit un plongement projectif $X_i \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_i}$ de X_i (ou un revêtement double $X_i \to \mathbb{P}^{N_i}$ dans certains cas), donné par le système linéaire $|H_i|$, où H_i est un diviseur ample primitif dans $\mathrm{Pic}\,(X_i)$, proportionnel à $-K_{X_i}$. L'entier positif non-nul r_i tel que $-K_{X_i} \sim r_i H_i$ est listé dans la colonne du tableau libellée par r et est appelé indice (ou indice de Fano) de X_i. Cela donne une description explicite de la surface $K3$ S_i, un diviseur anti-canonique de X_i, comme une section de X_i par une hypersurface $V(G_i) \subset \mathbb{P}^{N_i}$ de degré r_i. Dans la plupart des cas, on a $r_i = 1$, donc il s'agit d'une section hyperplane ; en général $1 \leq r_i \leq 4$, et il n'y a qu'une variété de Fano, à isomorphisme près, des indices 3 et 4 : ce sont la quadrique Q_3 de $\mathbb{P}^4$ et l'espace projectif $\mathbb{P}^3$.

On fixe une telle surface $K3$ S_i, en supposant son équation G_i générique, et on construit ensuite une famille de toutes les variétés de Fano X_i', déformations de X_i, contenant S_i. En général, on obtient une famille redondante $f_{B_i} : \mathcal{X}_{i,B_i} \to B_i$, où B_i est un ouvert dans une union disjointe de produits d'espaces projectifs. Les variétés algébriques $\mathcal{X}_{i,B_i}$ et B_i sont munies d'une action d'un groupe algébrique Γ_i, de sorte que f_{B_i} est équivariant et l'espace de modules des paires (S_i, X_i) avec S_i fixée s'identifie au quotient B_i/Γ_i. Cette caractérisation nécessite quelques précisions. Dans certains cas, Γ_i n'est pas réductif et on n'a pas de théorèmes de la théorie des invariants qui nous permettraient de conclure que B_i/Γ_i existe dans la catégorie des schémas ou des espaces algébriques, donc l'espace de modules $\mathcal{F}^{S_i} = [B_i/\Gamma_i]$ existe en tant qu'un champ quotient.

Si Γ_i est non-trivial, il est possible que le stabilisateur $\mathrm{Stab}_{\Gamma_i}(S_i, X_i)$ de certaines paires (S_i, X_i) soit non-trivial ; de telles paires sont alors des points champêtres de $\mathcal{F}^{S_i}$. On a $\mathrm{Stab}_{\Gamma_i}(S_i, X_i) \simeq \mathrm{Aut}\,(S_i, X_i)$, le groupe des automorphismes de X_i fixant S_i point par point. Puisque X_i est une variété de Fano, $\mathrm{Aut}\,(S_i, X_i)$ est formé d'automorphismes linéaires de X_i (dans le plongement via $|H_i|$) et est fini.

Soit $f_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{F}^{S_i}$ la famille universelle de variétés de Fano induite par f_{B_i}. D'après Beauville [6], $\dim \mathcal{F}^{S_i} = h^{1,2}(X_i)$ coïncide avec la dimension des fibres de la jacobienne intermédiaire relative $Jf_i : J_i = J(\mathcal{X}_i/\mathcal{F}^{S_i}) \to \mathcal{F}^{S_i}$. D'après [43], le champ J_i, de dimension $2h^{1,2}(X_i)$, porte une structure holomorphe symplectique naturelle, et le morphisme structural Jf_i est une fibration lagrangienne.

Selon les cas, on peut donner des descriptions différentes du champ $\mathcal{F}^{S_i}$. Par exemple, dans le cas où $X = X_i$ est une cubique de dimension 3 (le cas n^o13 du tableau 6.2), la surface $S = S_i$ et l'intersection générique d'une cubique $F = 0$ et d'une quadrique $G = 0$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^4$. Les cubiques lisses de dimension 3 contenant S sont alors paramétrées par un ouvert B de $\mathbb{P}^5$: à tout point $\lambda = (\lambda_0 : \ldots : \lambda_5) \in \mathbb{P}^5$, on associe la cubique X_λ d'équation $F_\lambda = 0$,

$$F_\lambda = (\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_4 x_4) G(x_0, \ldots, x_4) + \lambda_5 F(x_0, \cdot, x_4),$$

et B est l'ouvert des λ pour lesquels X_λ est lisse. Ici $\Gamma = \{\mathrm{Id}\}$ et $\mathcal{F}^S = B$. Cet exemple nous permet d'illustrer la difficulté principale du problème de compactification de la variété symplectique $J = J(\mathcal{X}/\mathcal{F}^S)$. La fibration $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} = V(F(\lambda, x)) \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^5$ est une compactification naturelle de la famille $f : \mathcal{X} \to \mathcal{F}^S$, mais les fibres $X_\lambda = \overline{f}^{-1}(\lambda)$ acquièrent des singularités lorsque $\lambda \in \mathbb{P}^5 \backslash B$, voire deviennent réductibles pour $\lambda_5 = 0$, et les jacobiennes intermédiaires (compactifiées) des cubiques X_λ singulières ne sont pas définies. Dans ce cas particulier, où $X = X_i$ est une cubique de $\mathbb{P}^4$, nous laissons la question sur l'existence d'une compactification symplectique de $J = J_i$ ouverte. Dans cet exemple, il se trouve que le groupe $\Gamma = \Gamma_i$ est trivial, donc le champ $\mathcal{F}^S$ est en fait un ouvert de $\mathbb{P}^5$. Dans le cas général, $\mathcal{F}^{S_i}$ n'est pas représentable. Nous résumons ci-dessous ce qu'on peut dire du type de l'espace $\mathcal{F}^{S_i}$ selon les cas.

Pour les 19 familles de paires $K3$-Fano (X, S) énumérées dans le théorème 5.1.3 (i), la famille universelle $f : \mathcal{X} \to \mathcal{F}^S$ est paramétrée par un ouvert $\mathcal{F}^S = B$ de $\mathbb{P}^N$ ou de $\mathbb{P}^N \sqcup \mathbb{P}^N$, et la jacobienne intermédiaire relative $J = J(\mathcal{X}/B) \to B$ admet une compactification symplectique $h : \overline{J} = M_S(v) \to \mathbb{P}^N$, respectivement $h : \overline{J} = M_S(v) \sqcup M_S(v') \to \mathbb{P}^N \sqcup \mathbb{P}^N$, où $M_S(v)$ désigne l'espace de modules de faisceau de torsion semi-stable sur S de vecteur de Mukai v et $h(\mathcal{F}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{F}$. Puis il y a 3 familles pour lesquelles l'espace de modules $\mathcal{F}^S$ est un ouvert de $\mathbb{P}^2$ et la jacobienne intermédiaire relative admet une compactification symplectique $J_{4,S} \to \mathbb{P}^2$. Il y a encore une autre famille pour laquelle $\mathcal{F}^S$ est un ouvert de $\mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1)$ et la jacobienne intermédiaire relative admet une compactification symplectique de la forme $\overline{J}_{4,S} \times (M_S(v) \sqcup M_S(v')) \to \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1)$. Et enfin, on trouve 4 familles pour lesquelles les fibrations lagrangiennes se décrivent en fonction des cas précédents : soit par produit direct, soit par spécialisation.

La question d'existence de compactifications symplectiques reste ouverte pour les familles de nombre de Picard 1 (tableau 6.1), pour des fibrés en coniques de la proposition 4.1.8 et pour la famille n^o8 du tableau 6.3. Dans un de ces cas restants n^o18 du tableau 6.3, nous construisons une compactification partielle de la jacobienne intermédiaire relative en utilisant les variétés de Prym de revêtements doubles de courbes avec singularités. Nous esquissons cette construction ci-dessous.

La surface $K3$ S et la variété de Fano X sont dans ce cas des sous-variétés du projectivisé $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^2$ du fibré vectoriel $\mathcal{E} = O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(1)$ sur $\mathbb{P}^2$. On note par F une section générique de $O_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/\mathbb{P}^2}(2) \otimes p^* O_{\mathbb{P}^2}(2)$ et par G une section générique de $O_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/\mathbb{P}^2}(1) \otimes p^* O_{\mathbb{P}^2}(2)$. On pose alors $S = V_{\mathbb{P}(\mathcal{E}}(F, G)$, et alors on a un $\mathbb{P}^2$ de variétés de dimension 3 X_t, $t = (t_0 : t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^2$, contenant S en tant que diviseur anticanonique, données dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ par l'équation

$$t_0 F + (t_1 x_0 + t_2 x_1) G = 0.$$

Ici x_0 et x_1 désignent les sections de $O_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/\mathbb{P}^2}(1)$, correspondant aux deux premiers facteurs $O_{\mathbb{P}^2}$ de $\mathcal{E}$ par l'isomorphisme canonique $H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/\mathbb{P}^2}(1)) \simeq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{E})$. L'espace de modules $\mathcal{F}^S = B$ est l'ouvert des $t \in \mathbb{P}^2$ pour lesquels la variété X_t est lisse. La restriction $p_S = p_{|S} : S \to \mathbb{P}^2$ est un revêtement double ramifié en une sextique lisse $C_0 \subset \mathbb{P}^2$, et les fibres des projections $p_t = p_{|X_t} : X_t \to \mathbb{P}^2$ sont des coniques. La courbe discriminante Δ_t pour t générique est une quartique lisse, telle que toutes les fibres de p_t au-dessus des points de Δ_t sont des coniques réductibles $\mathbb{P}^1 \vee \mathbb{P}^1$. On a alors un revêtement double naturel $\pi_t : \tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$ paramétrant les composantes irréductibles $\mathbb{P}^1$ des fibres réductibles $\mathbb{P}^1 \vee \mathbb{P}^1$, et d'après Beauville [4], la jacobienne intermédiaire $J(X_t)$ est isomorphe, de façon canonique, à la variété de Prym principalement polarisée $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\Delta}_t/\Delta_t)$. On étudie donc le problème de compactification de la famille $J(\mathcal{X}_B/B) \to B$ des jacobiennes intermédiaires en termes d'un prolongement de la famille des variétés de Prym $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\Delta}_t/\Delta_t)$ au points $t \in \mathbb{P}^2$, où soit Δ_t acquiert des singularités, soit X_t est réductible (toutes les fibres de p_t sont dans ce cas réductibles). Plus précisément, $\mathbb{P}^2 \backslash B = L \cup C_{28}$, où L est la droite d'équation $t_0 = 0$ et C_{28} est une courbe irréductible de degré 28. Au point générique de C_{28}, Δ_t acquiert un seul noeud hors de C_0, la variété X_t a un point double ordinaire, et la variété de Prym $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\Delta}_t/\Delta_t)$ est une extension de $\mathrm{Prym}\,(N(\tilde{\Delta}_t)/N(\Delta_t))$ des courbes normalisées par $\mathbb{C}^*$. La jacobienne intermédiaire se compactifie au-dessus d'un point générique de C_{28} par une variété non-normale $\overline{\mathrm{Prym}}\,(\tilde{\Delta}_t/\Delta_t)$ dont la normalisée $N(\overline{\mathrm{Prym}}\,(\tilde{\Delta}_t/\Delta_t))$ est un fibré au-dessus de $\mathrm{Prym}\,(N(\tilde{\Delta}_t)/N(\Delta_t))$ de fibre $\mathbb{P}^1$. Au point générique de L, la variété X_t devient réductible et $\Delta_t = \mathbb{P}^2$, cependant après division par t_0^2, les courbes de la famille $(\Delta_t)_{t_0 \neq 0}$ admettent une extension naturelle aux points $t \in L$ par des courbes intègres ayant deux noeuds hors de C_0. On arrive aussi à compactifier la famille des revêtements doubles $\tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$, de sorte que pour $t \in L$ générique, $\tilde{\Delta}_t = C_t \cup C'_t$ est la réunion de deux courbes elliptiques qui s'intersectent transversalement en 4 points.

0.3 Plan de la thèse

La première partie traite des motifs purs et comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, on donne les définitions de base et des résultats sur les motifs purs de variétés algébriques sur un corps quelconque. Aux chapitres 2 et 3, on regarde le cas particulier des fibrés en quadriques. Au chapitre 2, on donne une décomposition de Chow–Künneth relative explicite pour les fibrés en quadriques de dimension relative impaire au-dessus d'une surface projective lisse au discriminant lisse. On en déduit une description du motif relatif et une décomposition de Chow–Künneth absolue satisfaisant aux conjectures de Murre I, II et III. Au chapitre 3, on donne des compléments, et un énoncé dans le cas de discriminant quelconque, ainsi que dans le cas où la dimension relative est paire au-dessus d'une surface projective lisse au discriminant lisse.

Dans la seconde partie, qui est divisée en trois chapitres, on s'intéresse à la jacobienne intermédiaire relative des familles de variétés de Fano contenant une surface K3 fixée et plus particulièrement au problème de sa compactification symplectique. Dans le chapitre 4, on donne les notions de base sur les variétés symplectiques, les fibrations lagrangiennes et les variétés de Fano ; on rappelle aussi la définition de Beauville du champ algébrique des paires K3-Fano. Ensuite, au chapitre 5, après avoir énoncé le plan de travail, on donne les résultats pour chacune des familles de variétés de Fano de dimension 3 suivant la classification de Fano–Iskovskikh–Mori–Mukai. Dans la dernière section de ce chapitre, on étudie une compactification partielle d'un cas particulier dont les variétés de Fano sont des fibrés en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^2$, à l'aide du logiciel Macaulay 2. Une partie des résultats est justifiée par des calculs à l'ordinateur. La description de ces calculs et les codes pour Macaulay2 sont rassemblé dans [14]. Cette partie est suivie de deux de l'appendice qui résume, en quelques tableaux, toutes les familles de variétés de Fano de dimension 3.

Notations

Une variété algébrique X sur un corps k (non nécessairement algébriquement clos) est un schéma réduit X muni d'un morphisme de type fini $f_X : X \to \mathrm{Spec}\,(k)$. Dans toute la suite, on note :

1. $\mathrm{Var}\,(k)$ la catégorie dont les objets sont les variétés algébriques sur k et les morphismes entre deux objets X et Y sont les morphismes de schémas $f : X \to Y$ tels que $f_Y \circ f = f_X$. Pour $X, Y \in \mathrm{Var}\,(k)$, $X \times Y = X \times_k Y$ est le produit dans cette catégorie.
2. $\mathrm{SmVar}\,(k) \subset \mathrm{Var}\,(k)$ la sous-catégorie pleine formée des variétés algébriques lisses,
3. $\mathrm{PVar}\,(k) \subset \mathrm{QPVar}\,(k) \subset \mathrm{Var}\,(k)$ les sous-catégories pleines formées des variétés algébriques projectives, respectivement quasi-projectives,
4. $\mathrm{PSmVar}\,(k) = \mathrm{SmVar}\,(k) \cap \mathrm{PVar}\,(k) \subset \mathrm{Var}\,(k)$ la sous-catégorie pleine formée des variétés algébriques projectives lisses.
5. La dimension d'une variété X sera noté $d_X = \dim X$.
6. La transposée dún cycle algébrique Z sur un produit $X \times Y$ est $Z^t = \tau_*(Z)$, où $\tau : X \times Y \to Y \times X$ est l'isomorphisme qui interchange les deux facteurs.

Dans la partie II, toutes les variétés algébriques et espaces analytiques sont définis sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. En particulier on notera $\mathbb{A}^N = \mathbb{A}^N_{\mathbb{C}}$ et $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$.

Première partie

Motifs purs

Chapitre 1

Généralités sur les groupes de Chow et motifs

Sommaire

Ce premier chapitre est axé principalement sur les notions de base dans la théorie sur laquelle repose toute la première partie de ce travail. On rappelle tout d'abord les définitions de base, par la suite on énonce les différentes conjectures, à savoir les conjectures de Beilinson et les conjectures de Murre. Enfin on s'intéresse au notions de correspondances et motifs relatifs. Les références principales de ce chapitre sont [24], [35] et [55].

1.1 Notions de base

1.1.1 Cycles algébriques

Quelques définitions

Définition 1.1.1. *Soit* $X \in \mathrm{Var}(k)$.

- *Un cycle algébrique de codimension* r *sur* X *est une combinaison formelle finie* $Z = \sum_i n_i Z_i$ *de fermés irréductibles de Zariski* $Z_i \subset X$*, tels que* $\mathrm{codim}\,(X, Z_i) = r$ *et* $n_i \in \mathbb{Z}$ *pour tout* i*. Ainsi les cycles algébriques de codimension* r *forment le groupe abélien libre* $\mathcal{Z}^r(X)$ *engendré par les fermés irréductibles de codimension* r.
- *Un cycle algébrique de dimension* r *sur* X *est une combinaison formelle finie* $Z = \sum_i n_i Z_i$ *de fermés irréductibles de Zariski* $Z_i \subset X$*, tels que* $\dim\,(Z_i) = r$ *et* $n_i \in \mathbb{Z}$ *pour tout* i*. Ainsi les cycles algébriques de dimension* r *forment le groupe abélien libre* $\mathcal{Z}_r(X)$ *engendré par les fermés irréductibles de dimension* r.
- *Si* X *est de dimension pure* d_X*, un fermé irréductible de codimension* r *de* X *est un fermé irréductible de dimension* $d_X - r$ *et* $\mathcal{Z}_r(X) = \mathcal{Z}^{d_X - r}(X)$.

— *On peut aussi considérer les combinaisons formelles finies* $Z = \sum_i n_i Z_i$ *de fermés irréductibles de Zariski* $Z_i \subset X$, $\operatorname{codim}(X, Z_i) = r$,*(resp.* $\dim(Z_i) = r$*) avec les* $n_i \in \mathbb{Q}$ *pour tout* i*. On obtient alors l'espace vectoriel* $\mathcal{Z}^r(X)_{\mathbb{Q}} = \mathcal{Z}^r(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, *(resp.* $\mathcal{Z}_r(X)_{\mathbb{Q}} = \mathcal{Z}_r(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$*).*
— *Si* $W \hookrightarrow X$ *est un sous-schéma de pure dimension* r*, alors on lui associe le cycle effectif* $[W] = \sum_i n_i W_i \in \mathcal{Z}_r(X)$*, avec* $n_i \geq 0$*, où* $W_i \subset X$ *sont les composantes irréductibles de* W*, et* $n_i := l(O_{W_i,W})$ *est la multiplicité de la composante* W_i *pour chaque* i *(cf.[24, 1.5]).*
— *Le fermé (et ouvert)* $\emptyset \subset X$ *de* X *correspond au cycle* $[\emptyset] = 0 \in \mathcal{Z}^r(X)$ *pour tout* r*.*

On définit dans ce qui suit le "pushforward" pour un morphisme propre, et le "pullback" pour un morphisme plat.

Définition 1.1.2. — *[24, 1.4, p.11] Soient* $X, Y \in \operatorname{Var}(k)$ *et* $f : X \to Y$ *un morphisme propre. Si* $V \subset X$ *est un fermé irréductible de dimension* $\dim(V) = r$ *alors* $f(V) \subset Y$ *est un fermé irréductible de dimension* $\dim(f(V)) \leq r$*. On définit alors*

$$f_* : \mathcal{Z}_r(X) \to \mathcal{Z}_r(Y) \text{ par } \begin{cases} f_*V = \deg(V/f(V))f(V) & \text{si } \dim(f(V)) = r \\ f_*V = 0 & \text{si } \dim(f(V)) < r \end{cases}$$

Puis on étend par linéarité.

— *[24, 1.7, p.18] Soient* $X, Y \in \operatorname{Var}(k)$*,* Y *connexe, et* $f : X \to Y$ *un morphisme plat de dimension relative* n*. Si* $V \subset Y$ *est un fermé irréductible de dimension* $\dim(V) = r$*, alors,* $f^{-1}(V) := X \times_Y V \hookrightarrow X$ *est un sous-schéma de pure dimension* $\dim(f^{-1}(Y)) = r + n$ *soit* $f^{-1}(V) = \emptyset$*. On définit alors*

$$f^* : \mathcal{Z}_r(Y) \to \mathcal{Z}_{r+n}(X)$$

par $f^*V = f^{-1}(V)$*, puis on étend par linéarité.*

Définition 1.1.3. — *Soient* $X \in \operatorname{SmVar}(k)$ *et* $Z, Z' \subset X$ *deux sous-variétés fermées intègres de codimension* i *et* j *respectivement. Alors* $Z \cap Z' := Z \times_X Z' = \cup_\alpha Z''_\alpha \subset X$*, où* $Z''_\alpha \subset X$ *sont des sous-variétés fermées et, puisque* X *est lisse,* $\operatorname{codim}(Z''_\alpha, X) \leq i + j$*. Si* $\operatorname{codim}(Z''_\alpha, X) = i + j$ *pour tout* α*, on dit que* Z *et* Z' *s'intersectent proprement. Dans ce cas, on définit*

$$i(Z''_\alpha, Z \cap Z', X) = \sum_r (-1)^r l_A(Tor^A_r(A/\mathcal{I}_Z, A/\mathcal{I}_{Z'})),$$

où A *désigne l'anneau* $A = O_{X,Z''_\alpha}$ *et* $\mathcal{I}_Z$ *(resp.* $\mathcal{I}_{Z'}$*) l'idéal de la sous-variété* Z *(resp.* Z'*) dans* A*.*

— *Soient* $X, Y \in \operatorname{Var}(k)$ *de dimensions pures et* $f : X \to Y$ *un morphisme. On note* $p_X : X \times Y \to X$ *et* $p_Y : X \times Y \to Y$ *les deux projections. Alors la restriction de* p_X *au graphe de* f $\Gamma_f \subset X \times Y$ *est un isomorphisme* $p_{X|\Gamma_f} : \Gamma_f \xrightarrow{\sim} X$ *et est donc propre. Si* $Z \subset Y$ *est une sous-variété fermée intègre qui est telle que le graphe* $\Gamma_f \subset X \times Y$ *intersecte* $p_Y^* Z = p_Y^{-1}(Z)$ *(*p_Y *est un morphisme plat) proprement, on définit alors*

$$f^*Z = p_{X*}(\Gamma_f \cdot p_Y^* Z) \in \mathcal{Z}(X).$$

Soient $X \in \operatorname{SmVar}(k)$ *et* $\Delta_X : X \hookrightarrow X \times X$ *le plongement diagonal. Alors on peut montrer que pour deux sous-variétés intègres* $Z, Z' \subset X$ *de codimension* i *et* j *qui s'intersectent proprement, on a* $Z \cdot Z' = \Delta_X^*(Z \times Z') \in \mathcal{Z}^{i+j}(X)$*.*

Relations d'équivalence adéquates

Le terme de "relation d'équivalence" ([55, 1.2 p. 3]) sera utilisé pour une famille de relations d'équivalence sur le groupe abélien $\mathcal{Z}(X) := \oplus_i \mathcal{Z}^i(X)$: pour tout $X \in \operatorname{Var}(k)$ on a une relation d'équivalence sur les groupes abéliens $\mathcal{Z}^i(X)$. Une telle relation d'équivalence est dite adéquate, si sa restriction à la sous-catégorie pleine $\operatorname{PSmVar}(k) \subset \operatorname{Var}(k)$ satisfait aux propriétés suivantes :

(i) compatibilité avec la graduation et l'addition,
(ii) compatibilité avec les produits : si $Z \sim 0$ dans $\mathcal{Z}(X)$ alors, pour tout $Y \in \operatorname{PSmVar}(k)$, $Z \times Y \sim 0$ dans $\mathcal{Z}(X \times Y)$ (avec $Z \times Y = {p_X}^* Z$),

(iii) compatibilité avec les intersections : si $Z_1 \sim 0$ alors $Z_1 \cdot Z_2 \sim 0$, pour tout cycle Z_2,
(iv) compatibilité avec les projections : si $Z \sim 0$ dans $\mathcal{Z}(X \times Y)$, alors $p_{X*}Z \sim 0$ dans $\mathcal{Z}(X)$,
(v) Pour $Z \in \mathcal{Z}(X)$ et $W_1, \ldots, W_l$ des fermés stricts de X, il existe $Z' \in \mathcal{Z}(X)$ tel que $Z' \sim Z$ et Z' intersecte les W_j proprement pour tout $1 \leq j \leq l$, i.e. l'intersection $Z.W_j$ est bien défini pour tout j.

Définition 1.1.4. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence adéquate sur* $\mathrm{Var}\,(k)$. *On définit*

$$\mathcal{Z}^i_{\sim}(X) = \{Z \in \mathcal{Z}^i(X)/Z \sim 0\},$$

ce qui est un sous-groupe de $\mathcal{Z}^i(X)$ d'après la condition (i). On définit aussi

$$\mathcal{Z}^i_{\sim}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathcal{Z}^i_{\sim}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},$$

ce qui est un $\mathbb{Q}$–espace vectoriel.

On définit les quotients

$$C^i_{\sim}(X) = \mathcal{Z}^i(X)/\mathcal{Z}^i_{\sim}(X), \quad C_{\sim}(X) = \oplus_i C^i_{\sim}(X),$$

$$C^i_{\sim}(X)_{\mathbb{Q}} = C^i_{\sim}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad C_{\sim}(X)_{\mathbb{Q}} = C_{\sim}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Equivalence rationnelle

Cette notion est définie dans ([24, 1.3, p.10], [55, 1.2, p.4]). Soient $X \in \mathrm{Var}\,(k)$ et $W \subset X$ une sous-variété fermée intègre. Le cycle associé à une fonction rationnelle $f \in k(W)$ est défini par :

$$\mathrm{div}\,(f) = \sum_{Y \subset W} \mathrm{ord}_Y(f) \cdot Y, \quad \mathrm{codim}\,(W, Y) = 1,$$

où le morphisme $\mathrm{ord}_Y : k(W)^* \to \mathbb{Z}$ est donné par $\mathrm{ord}_Y(f) = l_{\mathcal{O}_{W,Y}}(\mathcal{O}_{W,Y}/(f))$, pour $f \in \mathcal{O}_{W,Y}$. Pour $f = \frac{f_1}{f_2} \in k(W)^*$, avec f_1, f_2 dans $\mathcal{O}_{W,Y}$, on définit $\mathrm{ord}_Y(f) = \mathrm{ord}_Y(f_1) - \mathrm{ord}_Y(f_2)$.
Le sous-groupe des cycles rationnellement équivalents à 0 est alors défini par :

$$\mathcal{Z}^i_{rat}(X) = \mathrm{Im}\,\{\oplus_{W \in X^{(i-1)}} k(W)^* \xrightarrow{\mathrm{div}} \oplus_{Z \in X^{(i)}} \mathbb{Z}\},$$

où chaque $X^{(i)}$, pour $0 \leq i \leq d_X$, est l'ensemble des sous-variétés fermées intègres de codimension i. Autrement dit, pour tout cycle $Z \in \mathcal{Z}^i_{\mathrm{rat}}(X)$, il existe une famille finie de paires (W_α, f_α) de sous-variétés fermées intègres W_α de codimension $(i-1)$ et de fonctions rationnelles $f_\alpha \in k(W_\alpha)$, telle que $Z = \sum_\alpha \mathrm{div}\,(f_\alpha)$.

Proposition 1.1.5. *([24, Prop. 1.6 , p.16]) Soit $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$. Alors $Z \in \mathcal{Z}^i(X)$ est rationnellement équivalent à zéro si et seulement si il existe une famille finie de sous-variétés fermées intègres $V_\alpha \subset X \times \mathbb{P}^1$, telles que la projection $V_\alpha \to \mathbb{P}^1$ est dominante pour tout α, avec*

$$Z = \sum_\alpha (V_\alpha(0) - V_\alpha(\infty)).$$

Proposition 1.1.6. *([55, Prop. 1.2.3, p. 5]) L'équivalence rationnelle est une relation d'équivalence adéquate.*

Proposition 1.1.7. *([24, Prop. 1.8 et Thm. 3.3]*

(i) Soient $X \in \mathrm{Var}\,(k)$, $i : Y \hookrightarrow X$ un plongement fermé et $j : U = X \backslash Y \hookrightarrow X$. On a la suite exacte de localisation

$$\mathrm{CH}_q(Y) \xrightarrow{i_*} \mathrm{CH}_q(X) \xrightarrow{j^*} \mathrm{CH}_q(U) \to 0.$$

(ii) La propriété d'homotopie est vérifiée : la projection $p_X : X \times \mathbb{A}^n_k \to X$ induit un isomorphisme

$$p_X^* : \mathrm{CH}^i(X) \tilde{\to} \mathrm{CH}^i(X \times \mathbb{A}^n_k).$$

Equivalence algébrique

Définition 1.1.8. *([24, Def. 10.3 , p.185]) Soit $X \in \mathrm{Var}(k)$. Un cycle $Z \in \mathcal{Z}^i(X)$ sur X est algébriquement équivalent à 0, noté $Z \sim_{\mathrm{alg}} 0$, s'il existe une courbe irréductible lisse C, un cycle $V \in \mathcal{Z}^i(C \times X)$ et deux points $a, b \in C$ tels que $Z = V(a) - V(b)$. Ainsi, on définit le sous-groupe :*

$$\mathcal{Z}^i_{\mathrm{alg}}(X) := \{Z \in \mathcal{Z}^i(X)/Z \sim_{\mathrm{alg}} 0\},$$

et le quotient

$$\mathrm{CH}^i_{\mathrm{alg}}(X) := \mathcal{Z}^i_{\mathrm{alg}}(X)/\mathcal{Z}^i_{\mathrm{rat}}(X) \subset \mathrm{CH}^i(X).$$

D'après la proposition [24, Prop. 10.3, p. 185], on déduit immédiatement la proposition.

Proposition 1.1.9. *L'équivalence algébrique est une relation d'équivalence adéquate.*

Equivalence smash-nilpotente

Pour $X \in \mathrm{Var}(k)$ et Z un cycle algébrique, on pose :

$$X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$$

$$Z^n = \underbrace{Z \times \cdots \times Z}_{n}.$$

Définition 1.1.10. *Soit $X \in \mathrm{Var}(k)$. Un cycle $Z \in \mathcal{Z}^i(X)$ est smash-nilpotent, ce qui est noté par $Z \sim_\otimes 0$, si et seulement si il existe un entier n tel que $Z^n \sim_{\mathrm{rat}} 0$ sur X^n.*

Proposition 1.1.11. *(cf. [55, Prop. 1.2.10]) La smash-nilpotence est une relation d'équivalence adéquate.*

Equivalence homologique

Soit F un corps commutatif de caractéristique 0 (non nécessairement algébriquement clos).

Définition 1.1.12. *([55, Def. 1.2.13, p. 7–8]) Une théorie cohomologique de Weil est un foncteur*

$$H : \mathrm{PSmVar}(F) \to \mathrm{GdVect}(F)$$

de $\mathrm{PSmVar}(F)$ dans la catégorie des F-espaces vectoriels gradués $\mathrm{GdVect}(F)$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(1) Il existe un cup-produit $\cdot : H(X) \times H(X) \to H(X)$ associatif, gradué, et super-commutatif, i.e. si $a \in H^i(X), b \in H^j(X)$, alors $b \cdot a = (-1)^{ij} a \cdot b$.

(2) On a la dualité de Poincaré : pour tout $X \in \mathrm{PSmVar}(F)$ connexe de dimension d_X, il existe un isomorphisme $\mathrm{Tr} : H^{2d_X}(X) \tilde{\to} F$ tel que

$$H^i(X) \times H^{2d_X - i}(X) \xrightarrow{\cdot} H^{2d_X}(X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} F$$

est un accouplement parfait (en particulier, $H^0(point) \simeq F$).

(3) La formule de Künneth est vérifiée :

$$H(X) \otimes H(Y) \xrightarrow{p_X^* \cdot p_Y^*} H(X \times Y)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués.

(4) Il existe des applications de classe de cycles

$$\gamma_X : \mathrm{CH}^i(X) \to H^{2i}(X)$$

qui sont

— *fonctorielles, au sens où si* $f : X \to Y$ *est un morphisme de* $\mathrm{PSmVar}\,(F)$*, alors* $f^* \circ \gamma_Y = \gamma_X \circ f^*$ *et* $f_* \circ \gamma_X = \gamma_Y \circ f_*$*,*
— *compatibles avec le produit d'intersection* $\gamma_X(\alpha \cdot \beta) = \gamma_X(\alpha) \cdot \gamma_X(\beta)$*,*
— *compatibles avec les points, i.e.,* $\mathrm{Tr} \circ \gamma_x = \deg$ *pour tout point* x*.*

(5) Le théorème de Lefschetz faible est vérifié : si $i : Y \hookrightarrow X$ *est une section hyperplane lisse, alors*

$$H^i(X) \longrightarrow H^i(Y) \text{ est } \begin{cases} \text{un isomorphisme} & \text{si } i < d_X - 1 \\ \text{injective} & \text{si } i = d_X - 1 \end{cases}$$

(6) Le théorème de Lefschetz difficile est vérifié : l'opérateur de Lefschetz $L(\alpha) = \alpha \cdot \gamma_X(Y)$ *induit l'isomorphisme*

$$L^i : H^{d_X - i}(X) \tilde{\to} H^{d_X + i}(X), \quad 0 \le i \le d_X.$$

Une théorie de cohomologie de Weil donne la définition suivante.

Définition 1.1.13. *([55, Def. 1.2.16, p. 9]) Un cycle* $Z \in \mathcal{Z}^i(X)$ *est dit homologiquement équivalent à 0, ce qui est noté* $Z \sim_{\mathrm{hom}} 0$*, si et seulement si* $\gamma_X(Z) = 0$*.*

Cette relation d'équivalence dépend du choix de la cohomologie de Weil. La fonctorialité de l'application classe de cycle pour une cohomologie de Weil montre la proposition suivante.

Proposition 1.1.14. *L'équivalence homologique est une relation d'équivalence adéquate.*

Equivalence numérique

Définition 1.1.15. *([55, Prop. 1.2.17, p. 10]) Soit* $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$*. Un cycle* $Z \in \mathcal{Z}^i(X)$ *est dit numériquement équivalent à* 0*, ce qui est noté* $Z \sim_{\mathrm{num}} 0$*, si pour tout cycle* $W \in \mathcal{Z}^{d_X - i}(X)$ *tel que* $Z \cdot W$ *est défini (i.e. est un* 0*-cycle, autrement dit* Z *et* W *s'intersectent proprement), on a* $\deg\,(Z \cdot W) = 0$*.*

La proposition suivante découle de l'associativité de l'intersection et de la formule des projections pour les variétés projectives lisses.

Proposition 1.1.16. *L'équivalence numérique est une relation d'équivalence adéquate.*

Proposition 1.1.17. *([55, Lem. 1.2.18, p. 10]) Soit* $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$*. On a la chaîne d'inclusions*

$$\mathcal{Z}^i_{\mathrm{rat}}\,(X) \subset \mathcal{Z}^i_{\mathrm{alg}}\,(X) \subset \mathcal{Z}^i_{\mathrm{hom}}\,(X) \subseteq \mathcal{Z}^i_{\mathrm{num}}\,(X) \subset \mathcal{Z}^i(X),$$

$$\mathcal{Z}^i_{\mathrm{rat}}\,(X)_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{Z}^i_{\mathrm{alg}}\,(X)_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{Z}^i_{\otimes}(X)_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{Z}^i_{\mathrm{hom}}\,(X)_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{Z}^i_{\mathrm{num}}\,(X)_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{Z}^i(X)_{\mathbb{Q}}.$$

Corollaire 1.1.18.

$$\mathrm{CH}^i_{\mathrm{alg}}\,(X) \subset \mathrm{CH}^i_{\mathrm{hom}}\,(X) \subseteq \mathrm{CH}^i_{\mathrm{num}}\,(X) \subset \mathrm{CH}^i(X),$$

$$\mathrm{CH}^i_{\mathrm{alg}}\,(X)_{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{CH}^i_{\otimes}(X)_{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{CH}^i_{\mathrm{hom}}\,(X)_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathrm{CH}^i_{\mathrm{num}}\,(X)_{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}}.$$

Intersection raffinée

Si $X, Y \in \mathrm{Var}\,(k)$ et $f : X \to Y$ est un morphisme propre, alors le morphisme $f_* : \mathcal{Z}_k(X) \to \mathcal{Z}_k(Y)$ passe au quotient par l'équivalence rationnelle pour donner le morphisme $f_* : \mathrm{CH}_k(X) \to \mathrm{CH}_k(Y)$.

Si $X, Y \in \mathrm{Var}\,(k)$ et $f : X \to Y$ est un morphisme plat de dimension relative d, alors le morphisme $f^* : \mathcal{Z}_k(Y) \to \mathcal{Z}_{k+d}(Y)$ passe au quotient par l'équivalence rationnelle pour donner le morphisme $f^* : \mathrm{CH}_k(Y) \to \mathrm{CH}_{k+d}(Y)$.

Soit $X, Y \in \mathrm{Var}\,(k)$ et $i_0 : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé. On note $C = C_X Y = \mathrm{Spec}_X(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}^n_{X,Y} / \mathcal{I}^{n+1}_{X,Y}) \to X$ le cône normal. Fulton [24, §5.1, p. 86] met en évidence une famille de plongements paramétrée par $\mathbb{P}^1$ qui est la suivante. On considère l'éclatement $\epsilon : M = M_X Y \to Y \times \mathbb{P}^1$ de $Y \times \mathbb{P}^1$ le long de la sous-variété $X \times \infty \subset Y \times \mathbb{P}^1$. Alors :

— $f : M \xrightarrow{\epsilon} Y \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est un morphisme plat.
— La fibre de f au-dessus de ∞ est $M_\infty = \mathbb{P}(C \oplus 1) \cup \tilde{Y}_X$, où $\tilde{Y}_X$ est l'éclaté de Y le long de X.

— On a un plongement relatif $i : X \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow M$. Au-dessus de $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \backslash \infty$, il s'agit du plongement relatif trivial $i_{\mathbb{A}^1} : X \times \mathbb{A}^1 \hookrightarrow M_{\mathbb{A}^1} = Y \times \mathbb{A}^1$.

— En notant $M^o = M \backslash \tilde{Y}_X$, le plongement relatif i se factorise par M^o. On peut donc écrire $i : X \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow M^o$. Au-dessus de $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \backslash \infty$, il s'agit donc du plongement relatif trivial $i_{\mathbb{A}^1} : X \times \mathbb{A}^1 \hookrightarrow M_{\mathbb{A}^1} = Y \times \mathbb{A}^1$, et au-dessus de ∞ du plongement $i_\infty : X \hookrightarrow \mathbb{P}(C \oplus 1)$.

Soient $X, Y \in \mathrm{Var}\,(k)$ et $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé. On note $C = C_X Y$ le cône normal. Si $V \hookrightarrow Y$ est une sous-variété fermée intègre de dimension k, $C_{V \cap X} V \hookrightarrow C = C_X Y$ est une sous-variété de dimension pure k. On a donc le morphisme dit de spécialisation

$$\sigma : \mathcal{Z}_k Y \to \mathcal{Z}_k(C),$$

$$\sigma[V] = [C_{V \cap X}]$$

pour un fermé irréductible $V \subset Y$, puis on étend par linéarité. Fulton [24] utilise la déformation $M^o = (M_X Y)^o \to \mathbb{P}^1$ du cône normal pour montrer la proposition suivante :

Proposition 1.1.19. *[24, Prop. 5.2, p. 89] Le morphisme*

$$\sigma : \mathcal{Z}_k Y \to \mathcal{Z}_k(C)$$

passe au quotient par l'équivalence rationnelle pour donner le morphisme

$$\sigma : \mathrm{CH}_k Y \to \mathrm{CH}_k(C).$$

Grâce à cette proposition on peut définir l'intersection raffinée des cycles de dimension k de Y avec X :

Définition 1.1.20. *Soient $X, Y \in \mathrm{Var}\,(k)$ et $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement régulier (localement intersection complète) de codimension $d = d_Y - d_X$. Alors $C_X Y = N_X Y = N \to X$ est un fibré vectoriel et on a donc le morphisme $s_N^* : \mathrm{CH}_k(N) \to \mathrm{CH}_{k-d}(X)$, où s_N est la section nulle du fibré vectoriel $N \to X$. On définit alors le morphisme*

$$i^* : \mathrm{CH}_k(Y) \to \mathrm{CH}_{k-d}(X)$$

comme le composé

$$i^* = s_N^* \circ \sigma : \mathrm{CH}_k(Y) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{CH}_k(N) \xrightarrow{s_N^*} \mathrm{CH}_{k-d}(X).$$

Définition 1.1.21. *[24, §6.2, pp. 97–98] Soient $X, Y \in \mathrm{Var}\,(k)$, $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement régulier (localement intersection complète) de codimension $d = d_Y - d_X$ et $f : Y' \to Y$ un morphisme de variétés algébriques. Considérons $X' = Y' \times_Y X$ et le diagramme cartésien :*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, "f'"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, hook, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

On a le plongement fermé de cônes au-dessus de X' :

$$i_c : C_{X'} Y' \hookrightarrow f'^* C_X Y = f'^* N_X Y = N'.$$

Puisque $N' \to X'$ est un fibré vectoriel, on a le morphisme $s_{N'}^* : \mathrm{CH}_k(N') \to \mathrm{CH}_{k-d}(X')$. L'homomorphisme

$$i^! : \mathcal{Z}_k(Y') \to \mathrm{CH}_k(X')$$

est le composé

$$\mathcal{Z}_k(Y') \xrightarrow{\sigma} \mathcal{Z}_k(C_{X'} Y') \to \mathrm{CH}_k(N') \xrightarrow{s_{N'}^*} \mathrm{CH}_k(X')$$

où la deuxième application est induite par i_c. Le morphisme σ passe au quotient par l'équivalence rationnelle par la proposition 1.1.19. Donc cette composition passe au quotient par l'équivalence rationnelle pour donner le morphisme

$$i^! : \mathrm{CH}_k(Y') \to \mathrm{CH}_{k-d}(X').$$

Corollaire 1.1.22. *[24, Cor 8.1.3, p. 134]*

— *Soient X, $Y \in \mathrm{SmVar}\,(k)$ et $f : X \to Y$ un morphisme. On note $p_X : X \times Y \to X$ et $p_Y : X \times Y \to Y$ les deux projections. Puisque Y est lisse, l'application graphe $i_f : \Gamma_f \hookrightarrow X \times Y$ définie par $i_f(x) = ((x, f(x))$ est un plongement régulier. On définit alors pour $Z \in \mathrm{CH}_k(Y)$*

$$f^*Z = i_f^*(p_Y^*(Z))$$

où i_f^* est définie comme ci–dessus (Définition 1.1.20).

— *Soit $X \in \mathrm{SmVar}\,(k)$. Puisque X est lisse, $\Delta_X : X \hookrightarrow X \times X$ est un plongement régulier. Alors l'intersection de cycles passe au quotient par l'équivalence rationnelle : pour $Z, Z' \in \mathcal{Z}(X)$ on a $[Z] \cdot [Z'] = \Delta_X^*[Z \times Z'] \in \mathcal{Z}(X)$.*

Remarque 1.1.23. *Soient $X \in \mathrm{SmVar}\,(k)$ et $i : Z \hookrightarrow X$, $i' : Z' \hookrightarrow X$ deux sous-variétés intègres. Alors $[Z] \cdot [Z'] = i_* i^*[Z'] = i'_* i'^*[Z] \in \mathrm{CH}\,(X)$.*

Parmi les propriétés principales de l'intersection raffinée est qu'elle est compatible avec la définition 1.1.3 et avec la cohomologie :

Proposition 1.1.24. *[24, Corollary 19.2] Soient $X, Y \in \mathrm{SmVar}\,(k)$ irréductibles et $f : X \to Y$ un morphisme. Alors, pour $Z \in \mathrm{CH}_k(Y)$, $f^*[Z] = [f^*Z] \in H^{2d_X - 2k}(X)$.*

1.1.2 Correspondances et motifs

Définitions

Les définitions suivantes se trouvent dans le livre de Murre–Nagel–Peters [55, Ch. 2, p. 23,24]. Si une variété $X \in \mathrm{Var}\,(k)$ est irréductible de dimension $d = d_X$, on la note X_d.

Définition 1.1.25. *Fixons une relation d'équivalence adéquate $\sim$. Soient $X, Y \in \mathrm{Var}\,(k)$.*

— *Le groupe des correspondances de X vers Y est*

$$\mathrm{Corr}_\sim(X, Y) = C_\sim(X \times Y)_\mathbb{Q}.$$

— *On définit le degré r d'une correspondance par*

$$\mathrm{Corr}^r_\sim(X_d, Y) = C^{d+r}_\sim(X_d \times Y)_\mathbb{Q}.$$

— *Si $\sim$ est l'équivalence rationnelle, on note simplement*

$$\mathrm{Corr}\,(X, Y) = \mathrm{CH}\,(X \times Y)_\mathbb{Q}.$$

Dans le cas où les variétés algébriques sur k sont projectives lisses, on peut définir la composition de correspondances.

Définition 1.1.26. *Si $X, Y, Z \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ sont trois variétés projectives lisses, $\Gamma_1 \in \mathrm{Corr}_\sim(X, Y)$ et $\Gamma_2 \in \mathrm{Corr}_\sim(Y, Z)$, la composée des correspondances $\Gamma_2 \circ \Gamma_1 \in \mathrm{Corr}_\sim(X, Z)$ est définie par*

$$\Gamma_2 \circ \Gamma_1 = p_{XZ*}((\Gamma_1 \times Z) \cdot (X \times \Gamma_2)).$$

L'intersection $(\Gamma_1 \times Z) \cdot (X \times \Gamma_2)$ est bien définie puisque $X \times Y \times Z$ est lisse et $p_{X,Z}$ est propre par la projectivité de Y.

Remarque 1.1.27. *On voit que si $\Gamma_1 \in \mathrm{Corr}^r_\sim(X, Y)$ et $\Gamma_2 \in \mathrm{Corr}^s_\sim(Y, Z)$, alors $\Gamma_2 \circ \Gamma_1 \in \mathrm{Corr}^{r+s}_\sim(X, Z)$.*

Définition 1.1.28. *Soient $X, Y \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ deux variétés projectives lisses.*

- *Une correspondance* $\Gamma \in \mathrm{Corr}^r_\sim(X,Y)$ *agit sur* $C_\sim(X)_\mathbb{Q}$ *par l'homomorphisme*
$$\Gamma_* : C^i_\sim(X)_\mathbb{Q} \to C^{i+r}_\sim(X)_\mathbb{Q},$$
défini par
$$\Gamma_* Z = p_{Y*}(\Gamma \cdot (Z \times Y))$$
pour $Z \in C^i_\sim(X)_\mathbb{Q}$.
- *De plus, en supposant que* $\sim$ *est plus fine ou égale à l'équivalence homologique,* Γ *agit sur* $H^i(X)$ *par l'homomorphisme*
$$\Gamma_* : H^i(X) \to H^{i+r}(Y),$$
défini par
$$\Gamma_* \alpha = p_{Y*}(\Gamma \cdot p_X^* \alpha)$$
pour $\alpha \in H^i(X)$.

On définit ainsi la catégorie additive des correspondances :

Définition 1.1.29. *Pour une relation d'équivalence adéquate* $\sim$, $\mathrm{Corr}_\sim(\mathrm{PSmVar}\,(k))$ *est la catégorie dont les objets sont les variétés projectives lisses, i.e. les mêmes que* $\mathrm{PSmVar}\,(k)$*, et les morphismes entre* $X, Y \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ *sont* $\mathrm{Hom}\,(X,Y) := \mathrm{Corr}_\sim(X,Y)$*. Comme on se restreint aux variétés projectives lisses, la composition est bien définie. C'est une catégorie additive avec* $X \oplus Y = X \sqcup Y$ *pour* $X, Y \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$*. De plus, cette catégorie additive admet un produit tensoriel* $X \otimes Y = X \times Y$ *pour* $X, Y \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ *et* $\mathrm{Spec}\, k$ *est l'élément unité. De même* $\mathrm{Corr}^0_\sim(\mathrm{PSmVar}\,(k)) \subset \mathrm{Corr}_\sim(\mathrm{PSmVar}\,(k))$ *est la sous-catégorie dont les objets sont les variétés projectives lisses* $\mathrm{PSmVar}\,(k)$ *et les morphismes* $\mathrm{Hom}\,(X,Y) := \mathrm{Corr}^0_\sim(X,Y)$.

Remarque 1.1.30. *(cf. [51, §4.1.2, p. 127])*
- $\mathrm{Corr}^0_\sim(-,-)$ *respecte les degrés.*
- *Les correspondances modulo équivalence rationnelle agissent sur les groupes de Chow et sur la cohomologie. Les correspondances modulo équivalence homologique agissent sur la cohomologie.*
- *Via la composition de correspondances,* $\mathrm{Corr}_\sim(X,X)$ *pour* $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ *devient un anneau et* $\mathrm{Corr}^0_\sim(X,X)$ *est un sous-anneau de* $\mathrm{Corr}_\sim(X,X)$.

Définition 1.1.31. *Soit* $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ *une variété projective lisse. Une correspondance* $p \in \mathrm{Corr}^0_\sim(X,X)$ *est appelée projecteur de* X *si* $p \circ p = p$*. On dit que deux projecteurs* $p, q \in \mathrm{Corr}^0_\sim(X,X)$ *sont orthogonaux si* $p \circ q = q \circ p = 0$.

Pour une relation d'équivalence adéquate $\sim$, Grothendieck a défini la catégorie des motifs purs $\mathcal{M}_\sim(k)$ comme suit ([55, §2.2 pp. 25–26]) :

Motifs purs effectifs

La catégorie $\mathcal{M}^+_\sim(k)$ des motifs purs effectifs a pour objets les paires (X,p), où $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ est une variété projective lisse et p est un projecteur de X, et les morphismes entre $M = (X,p)$ et $N = (Y,p)$ sont définis par

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^+_\sim(k)}(M,N) &:= q \circ \mathrm{Corr}^0_\sim(X,Y) \circ p \\ &= \left\{\Gamma \in \mathrm{Corr}^0_\sim(X,Y), \Gamma \circ p = q \circ \Gamma\right\} / \left\{\Gamma | q \circ \Gamma = \Gamma \circ p = 0\right\}.\end{aligned}$$

Motifs purs

Comme pour la cohomologie, on s'autorise à tordre les motifs par des entiers et on définit la catégorie $\mathcal{M}_\sim(k)$ des motifs purs dont les objets sont les triplets (X,p,m), où $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ est une variété projective lisse, p un projecteur de X et $m \in \mathbb{Z}$ et les morphismes entre $M = (X,p,m)$ et $N = (Y,p,n)$ sont définis par

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_\sim(k)}(M,N) : &= q \circ \mathrm{Corr}^{n-m}_\sim(X,Y) \circ p \\ &= \left\{\Gamma \in \mathrm{Corr}^{n-m}_\sim(X,Y), \Gamma \circ p = q \circ \Gamma\right\} / \left\{\Gamma \in \mathrm{Corr}^{n-m}_\sim(X,Y), \Gamma \circ p = q \circ \Gamma = 0\right\}.\end{aligned}$$

Clairement $\mathcal{M}^+_\sim(k) \subset \mathcal{M}_\sim(k)$ est une sous-catégorie pleine via $(X,p) \mapsto (X,p,0)$.

Proposition 1.1.32. — *$\mathcal{M}_\sim(k)$ est une catégorie additive. Si $n = m$,*

$$(X, p, m) \oplus (Y, q, m) = (X \sqcup Y, (i_{X\times X})_* p + (i_{Y\times Y})_* q, m).$$

Pour le cas $n \neq m$, on se réfère à [69].
- *$\mathcal{M}_\sim(k)$ est même une catégorie pseudo-abélienne : c'est la complétion pseudo-abélienne de la catégorie $\mathrm{Corr}^0_\sim(\mathrm{PSmVar}\,(k))$.*
- *$\mathcal{M}_\sim(k)$ admet un produit tensoriel avec $(X, p, m) \otimes (Y, q, n) = (X \times Y, p \times q, m + n)$. Le motif $\mathbb{1} := (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_k, 0)$ est l'élément unité, i.e. $(X, p) \otimes \mathbb{1} = \mathbb{1} \otimes (X, p) = (X, p)$*
- *Il existe un foncteur $h : \mathrm{PSmVar}\,(k) \to \mathcal{M}_\sim(k)$ donné par : $h_\sim(X) = (X, \Delta_X, 0)$, et si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés algébriques, $h_\sim(f) = \Gamma_f^t = f^* : h_\sim(Y) \to h_\sim(X)$*
- *$\mathcal{M}_\sim(k)$ a une structure multiplicative :*

$$m_X : h_\sim(X) \otimes h_\sim(X) = h_\sim(X \times X) \xrightarrow{h_\sim(\Delta_X)} h_\sim(X).$$

- *Il existe une involution $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}_\sim(k) \to \mathcal{M}_\sim(k)$ donnée par $M = (X_d, p, m) \mapsto \hat{M} := (X_d, p^t, d - m)$.*

Lemma 1.1.33. *Soit $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ une variété projective lisse. Si $p, q \in \mathrm{CH}_{d_X}(X \times X)$ sont deux projecteurs orthogonaux (i.e. $pq = qp = 0$) alors, on a un isomorphisme de motifs*

$$(X, p + q) \tilde{\to} (X, p) \oplus (X, q).$$

Démonstration.
On note $X^{(1)} = X$ et $X^{(2)} = X$ deux copies de X, $(X \times X)^{(1)} := X \times X^{(1)} = X \times X$ et $(X \times X)^{(2)} := X \times X^{(2)} = X \times X$, $(X \times X)^{(1,1)} := X^{(1)} \times X^{(1)} = X \times X$ et $(X \times X)^{(2,2)} := X^{(2)} \times X^{(2)} = X \times X$. Soit
- $\Delta^1_X \subset X \times (X^{(1)} \sqcup X^{(2)}) = (X \times X)^{(1)} \sqcup (X \times X)^{(2)}$ la diagonale de $(X \times X)^{(1)}$,
- $\Delta^2_X \subset X \times (X^{(1)} \sqcup X^{(2)}) = (X \times X)^{(1)} \sqcup (X \times X)^{(2)}$ la diagonale de $(X \times X)^{(2)}$,
- ${}^1\Delta_X =^t \Delta^1_X \subset (X^{(1)} \sqcup X^{(2)}) \times X = (X \times X)^{(1)} \sqcup (X \times X)^{(2)}$ le transposé de Δ^1_X, qui est la diagonale de $(X \times X)^{(1)}$,
- ${}^2\Delta_X =^t \Delta^2_X \subset (X^{(1)} \sqcup X^{(2)}) \times X = (X \times X)^{(1)} \sqcup (X \times X)^{(2)}$ le transposé de Δ^2_X, qui est la diagonale de $(X \times X)^{(2)}$,
- $p^1_1 \in \mathrm{CH}_{d_X}((X^{(1)} \sqcup X^{(2)}) \times (X^{(1)} \sqcup X^{(2)}))$ le projecteur p_1 sur $(X \times X)^{(1,1)}$,
- $p^2_2 \in \mathrm{CH}_{d_X}((X^{(1)} \sqcup X^{(2)}) \times (X^{(1)} \sqcup X^{(2)}))$ le projecteur p_2 sur $(X \times X)^{(2,2)}$

On vérifie alors immédiatement que les correspondances

$$\phi = (p_1 + p_2) \circ ({}^1\Delta_X +^2 \Delta_X) \circ (p^1_1 + p^2_2) \in \mathrm{CH}_{d_X}((X^{(1)} \sqcup X^{(2)}) \times X)$$

et

$$\psi = (p^1_1 + p^2_2) \circ (\Delta^1_X + \Delta^2_X) \circ (p_1 + p_2) \in \mathrm{CH}_{d_X}(X \times (X^{(1)} \sqcup X^{(2)}))$$

satisfont aux relations $\phi \circ \psi = p_1 + p_2$ et $\psi \circ \phi = p^1_1 + p^2_2$.
Donc

$$\psi : (X, p + q) \tilde{\to} (X^{(1)} \sqcup X^{(2)}, p^1_1 + p^2_2) := (X, p_1) \oplus (X, p_2)$$

est un isomorphisme de motifs d'inverse $\psi^{-1} = \phi$.

□

Mentionnons maintenant le lemme de Lieberman :

Proposition 1.1.34 (Lemme de Lieberman)**.** *([55, Lemma 2.1.3]) Soient X, Y, X', $Y' \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ et $\Gamma \in \mathrm{Corr}_\sim(X, Y)$, $\Gamma_1 \in \mathrm{Corr}_\sim(X, X')$, $\Gamma_2 \in \mathrm{Corr}_\sim(Y, Y')$. Alors $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)_*(\Gamma) = \Gamma_2 \circ \Gamma \circ \Gamma^t_1$.*

Il faut noter que le terme de droite est une composée de correspondances, tandis que le terme de gauche est l'action de la correspondance $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \in C_\sim(X \times X' \times Y \times Y') = \mathrm{Corr}_\sim(X \times Y, X' \times Y')$.
Le lemme de Lieberman donne en particulier le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.35. *Soient* $X,\ Y,\ X',\ Y' \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ *et* $\Gamma \in \mathrm{Corr}_{\sim}(X,Y)$, $f_1 : X \to X'$, $f_2 : Y \to Y'$, $f_1' : X' \to X$, $f_2' : Y' \to Y$. *Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

— $(f_1 \times f_2)_*(\Gamma) = f_{2*} \circ \Gamma \circ f_1^*$,

— $(f_1' \times f_2')^*(\Gamma) = {f_2'}^* \circ \Gamma \circ f_{1*}'$,

donc en particulier :

— $(f_1 \times I_Y)_*(\Gamma) = \Gamma \circ f_1^*$, $(I_X \times f_2)_*(\Gamma) = f_{2*} \circ \Gamma$,

— $(f_1' \times I_Y)^*(\Gamma) = \Gamma \circ f_{1*}'$, $(I_X \times f_2')^*(\Gamma) = {f_2'}^* \circ \Gamma$.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le Lemme de Lieberman 1.1.34 à $\Gamma_1 = \Gamma_{f_1} = f_{1*}$ et $\Gamma_2 = \Gamma_{f_2} = f_{2*}$ pour le premier point et à $\Gamma_1 = \Gamma_{f_1'}^t = {f_1'}^*$ et $\Gamma_2 = \Gamma_{f_2'}^t = {f_2'}^*$ pour le deuxième point.

□

Motif de Lefschetz et motif de Tate

Le motif $\mathbb{L} = (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_k, -1)$ est appelé motif de Lefschetz, et le motif $\mathbb{T} = (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_k, 1)$ motif de Tate. On a ainsi $(X,p,m) = (X,p,0) \otimes \mathbb{L}^{-m} = (X,p,0) \otimes \mathbb{T}^m$.

Projecteurs $p_0(X)$ et $p_{2d}(X)$

Soit $X = X_d \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ irréductible et e un point fermé de X. On pose

$$\begin{aligned} p_0(X) &= [e \times X] \in \mathrm{CH}_d(X \times X) \\ p_{2d}(X) &= [X \times e] \in \mathrm{CH}_d(X \times X) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Alors $p_0(X)$ et $p_{2d}(X)$ sont des projecteurs. De plus $p_0(X)$ agit par zéro sur $H^j(X)$ pour $j \neq 0$ et par l'identité sur $H^0(X)$, et $p_{2d}(X)$ agit par zéro sur $H^j(X)$ pour $j \neq 2d$ et par l'identité sur $H^{2d}(X)$. On a des isomorphismes de motifs de Chow : $(X, p_0(X)) \simeq \mathbb{1}$ et $(X, p_{2d}(X)) \simeq \mathbb{L}^{\otimes d}$ [55, Sec. 6.1.2, p. 68].

Motifs de Picard et d'Albanese

La construction des motifs de Picard et d'Albanese est due a Murre (cf. [53]) ou encore, pour plus de précision [55, Ch.6, pp. 71–74]. Soit $X = X_d \subset \mathbb{P}_k^n$ une variété projective lisse irréductible. On fixe un point $e \in X$. On note $e^* \subset (\mathbb{P}^n)^*$ l'espace des hyperplans H_t de $\mathbb{P}^n$ passant par e. Pour $t = (t_1, ..., t_{d-1}) \in e^* \times ... \times e^*$ générique, $C_t = H_{t_1} \cap ... \cap H_{t_{d-1}} \cap X \subset \mathbb{P}^n$ est une courbe lisse. On notera $i : C_t = C \hookrightarrow X$ le plongement fermé. Rappelons que l'on note $i^* = \Gamma_i^t \in \mathrm{Corr}^0(X,C)$ et $i_* = \Gamma_i \in \mathrm{Corr}^{d-1}(C,X)$. La correspondance $i_* i^* \in \mathrm{Corr}^{d-1}(X,X)$ induit la $(d-1)^{\text{ieme}}$ puissance L^{d-1} de l'opérateur de Lefschetz. La conjecture standard de Grothendieck de type Lefschetz, appelée $B(X)$, prédit que l'opérateur $\Lambda \in H^{2d}(X \times X)$, qui est l'inverse de l'opérateur de Lefschetz ([53, §4.2.1.1, p.138]), est algébrique, i.e. $\Lambda = \gamma_{X \times X}(Z)$ pour un certain $Z \in \mathrm{CH}^{d-1}(X \times X)_{\mathbb{Q}}$. Cela n'est pas encore connu, mais on sait que $\Lambda^{d-1} \in H^2(X \times X)$ est algébrique, induit par une certaine correspondance de $\mathrm{CH}^1(X \times X)$. On a en effet l'isomorphisme

$$\varphi : \mathrm{CH}^1(X \times X)^0 := \left\{ D \in \mathrm{CH}^1(X \times X), D_* e = 0, D_*^t e = 0 \right\} \tilde{\to} \mathrm{Hom}\,(X, P_X) \tilde{\to} \mathrm{Hom}\,(A_X, P_X),$$

où P_X est la variété abélienne de Picard et A_X est la variété abélienne d'Albanese.

En utilisant le fait (pour les courbes projectives lisses) que $P_C \simeq A_C \simeq J(C)$, on voit que $\Gamma_i \circ \Gamma_i^t$ induit le morphisme de variétés abéliennes $\alpha = \Delta(C)_* = i_* i^* : P_X \xrightarrow{i^*} P_C \simeq A_C \xrightarrow{i_*} A_X$, qui est une isogénie De plus $\alpha = \hat{\alpha}$ et α ne dépend pas de t. Puisque $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(P_X, A_X)$ est une isogénie, il existe une isogénie $\beta \in \mathrm{Hom}\,(A_X, P_X)$, $\beta = \hat{\beta}$, et un entier $m \neq 0$ tel que $\alpha \circ \beta = m I_{A_X}$ et $\beta \circ \alpha = m I_{P_X}$.

On considère alors la correspondance $D(\beta) := \varphi^{-1}(\beta) \in \mathrm{CH}^1(X \times X)^0$. Par construction $\gamma_{X \times X}(D(\beta)) = \Lambda^{d-1}$. On considère alors les compositions de correspondances

$$\begin{aligned} p_1(X) &= \frac{1}{m} D(\beta) i_* i^* \in \mathrm{Corr}\,(X,X), \\ p_{2d-1}(X) &= p_1(X)^t = \frac{1}{m} i_* i^* D(\beta)^t. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Elles satisfont aux propriétés suivantes :
— $p_1(X)$ est un projecteur, orthogonal à $p_0(X) = [e \times X]$, et $p_{2d}(X) = [X \times e]$.
— $p_1(X)$ agit par zéro sur $\mathrm{CH}^j(X)$ pour $j > 1$ et sur $\mathrm{CH}^0(X)$, et agit comme l'identité sur $\mathrm{Pic}^0(X)$.
— $p_1(X)_* H^k(X) = \delta_{1,k} H^k(X)$.
— $p_{2d-1}(X)$ est un projecteur, orthogonal à $p_0(X) = [e \times X]$, et $p_{2d}(X) = [X \times e]$.
— $p_{2d-1}(X)$ agit par zéro sur $\mathrm{CH}^j(X)$ pour $j \neq d$, et agit comme l'identité sur $\mathrm{Alb}_X(k)_{\mathbb{Q}}$.
— $p_{2d-1}(X)_* H^k(X) = \delta_{2d-1,k} H^k(X)$.
— $p_{2d-1}(X) \circ p_1(X) = 0$ et, si $d \geq 3$, alors $p_1(X) \circ p_{2d-1}(X) = 0$

La finitude de la dimension d'un motif pur

On se réfère au chapitres 4 et 5 de [55]. Soit $X \in \mathrm{PSmVar}(k)$. On a une action (à gauche) du groupe symétrique S_n sur le produit $X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ facteurs}}$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} X^n & \to & X^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}). \end{array}$$

On note son graphe par $\Gamma_\sigma(X)$; c'est la sous-variété de $X^n \times X^n$ dont les points sont de la forme suivante : $(x_1, \ldots, x_n, x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$. Plus généralement, pour tout $r = \sum_\sigma r(\sigma) \in \mathbb{Q}[S_n]$, on définit une $\mathbb{Q}$-correspondance $\Gamma_r(X) \in \mathrm{Corr}^0_\sim(X^n, X^n)$ par

$$\Gamma_r(X) = \sum_{\sigma \in S_n} r(\sigma)[\Gamma_\sigma(X)].$$

D'après cette définition, on remarque que le produit dans $\mathbb{Q}[S_n]$ correspond à la composition des correspondances, i.e.

$$\Gamma_{rs}(X) = \Gamma_r(X) \circ \Gamma_s(X).$$

On pose $e_\lambda = \frac{\dim W_\lambda}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma) \cdot \sigma$, où W_λ est la représentation correspondant à la partition λ de n, de caractère χ_λ. En particulier on a

$$\begin{array}{rcl} e_{\mathrm{sym}} = e_{(n)} & = & \frac{!}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \\ e_{\mathrm{alt}} = e_{(1,1,\cdots,1)} & = & \frac{!}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma. \end{array}$$

Alors les projecteurs

$$\pi_\lambda(X) := \Gamma_{e_\lambda(X)}$$

sont deux à deux orthogonaux

Pour $M = (X, p, m) \in \mathcal{M}_\sim(k)$, on définit le motif $M^{\otimes n} = (X^n, p^{\otimes n}, nm)$. Un calcul rapide montre que

$$\Gamma_\sigma(M) := \Gamma_\sigma(X) \circ p^{\otimes n} = p^{\otimes n} \circ \Gamma_\sigma(X),$$

donc $\Gamma_\sigma(M)$ est un endomorphisme du motif $M^{\otimes} n$.

Les projecteurs $\pi_\lambda(X)$ donnent une décomposition du projecteur $p^{\otimes n}$ en projecteurs deux à deux orthogonaux :

$$p^{\otimes n} = \sum_\lambda \pi_\lambda(X) \circ p^{\otimes n}.$$

Définition 1.1.36. *Soient $M = (X, p, m) \in \mathcal{M}_\sim(k)$, et λ une partition de n. On pose*

$$\mathbb{T}_\lambda M := (X^n, \pi_\lambda(X) \circ p^{\otimes n}, nm) \in \mathcal{M}_\sim(k).$$

En particulier,

$$\mathrm{Sym}^n(M) := \mathbb{T}_{(n)} M := (X^n, \pi_{\mathrm{sym}}(X) \circ p^{\otimes n}, nm),$$
$$\Lambda^n(M) := \mathbb{T}_{(1,\ldots,n)} M := (X^n, \pi_{\mathrm{alt}}(X) \circ p^{\otimes n}, nm).$$

Proposition 1.1.37. *[55, Prop. 4.3.3] Soit $M = (X, p, 0) \in \mathcal{M}_\sim(k)$. Alors*

$$H(\operatorname{Sym}^n(M)) = \oplus_{i+j=n} \operatorname{Sym}^i H^{pair}(M) \otimes \Lambda^j H^{impair}(M),$$

$$H(\Lambda^n(M)) = \oplus_{i+j=n} \Lambda^i H^{pair}(M) \otimes \operatorname{Sym}^j H^{impair}(M).$$

Définition 1.1.38. - *M est dit pairement de dimension finie si $\Lambda^n M = 0$ pour un $n > 0$,*
- *M est dit impairement de dimension finie si $\operatorname{Sym}^n M = 0$ pour un $n > 0$,*
- *M est de dimension finie si $M = M_{pair} \oplus M_{impair}$, avec M_{pair} pairement de dimension finie et M_{impair} impairement de dimension finie.*

Conjectures (Conjecture $S(X)$)**.** *[55, Conj. 4.5.1] La somme des composantes de Künneth paires de la diagonale et la somme des composantes de Künneth impaires de la diagonale sont algébriques.*

Lemme 1.1.39. *Si la conjecture $S(X)$ est vérifiée, alors $h_{\mathrm{hom}}(X)$ est de dimension finie.*

La démonstration se trouve dans [55, Lemma 4.5.3].

Proposition 1.1.40. *Si, pour $X \in \mathrm{PSmVar}(k)$ irréductible et tout entier $n \geq 0$, le sous-espace $\mathbb{Q}$-vectoriel $\mathrm{CH}_{d_X}(X^n \times X^n)_{\mathrm{num}} \subset \mathrm{CH}_{d_X}(X^n \times X^n)$ est formé d'éléments nilpotents pour la composition des correspondances et si la conjecture $S(X)$ est vérifiée, alors le motif $\mathrm{ch}(X) := (X, \Delta_X)$ est de dimension finie, donc en particulier tout motif (X, p), pour tout projecteur $p \in \mathrm{CH}_{d_X}(X \times X)$, est de dimension finie.*

Théorème 1.1.41. *(Šermenev, Künnemann, Kimura [55, Thm. 4.6.1, p. 47]) Soit C une courbe projective lisse de genre g. Le motif $\mathrm{ch}^1(C)$ est impairement de dimension finie $2g$. Donc $\mathrm{ch}(C)$ est de dimension finie.*

On s'intéresse maintenant à quelques propriétés des motifs de dimension finie.

Théorème 1.1.42. *Soient M et N deux motifs.*
- *M et N sont pairement (resp. impairement) de dimension finie si et seulement si $M \oplus N$ est pairement (resp. impairement) de dimension finie.*
- *M et N sont de dimension finie si et seulement si $M \oplus N$ est de dimension finie, de plus $\dim(M \oplus N) \leq \dim M + \dim N$.*
- *Si M et N sont tous deux pairement (ou impairement) de dimension finie, alors $M \otimes N$ est pairement de dimension finie.*
- *Si M et N sont de dimension finie, l'un pairement et l'autre impairement, alors $M \otimes N$ est impairement de dimension finie.*
- *Si M et N sont de dimension finie, alors $M \otimes N$ est de dimension finie, de plus $\dim(M \otimes N) \leq \dim M \cdot \dim N$.*

Démonstration. Voir [55, Prop. 5.1.1 et Thm. 5.1.4]. □

Théorème 1.1.43. *[55, Thm. 5.5.1] Soient $M = (X, p, m)$ un motif de Chow et $f : M \to M$ un morphisme de motifs de Chow. On suppose que M est soit pairement de dimension finie avec $\Lambda^n M = 0$, ou impairement de dimension finie avec $\operatorname{Sym}^n(M) = 0$. Alors :*
(i) Il existe un polynôme non nul $G(T) \in \mathbb{Q}[T]$ de degré $n-1$ avec $G(f) = 0$.
(ii) Si $f \sim_{\mathrm{num}} 0$, alors f est nilpotent, plus précisément, $f^{n-1} = 0$.

Proposition 1.1.44. *[55, Prop. 5.3.1] Soient M et N deux motifs de dimension finie de parité différente et $f : M \to N$ un morphisme. Alors f est smash-nilpotent, plus précisément, $f^{\otimes \ell} = 0$ si $\ell > \dim M \cdot \dim N$.*

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du théorème et de la proposition.

Corollaire 1.1.45. *Soit M un motif de Chow de dimension finie. Un endomorphisme f de M qui est numériquement équivalent à zéro est nilpotent. De plus, l'indice de nilpotence est uniformément borné, i.e. l'indice de nilpotence ne dépend que de la dimension de M.*

1.2 Conjectures sur les groupes de Chow

1.2.1 Motivation : conjectures de Beilinson

Bloch et Beilinson ont conjecturé l'existence d'une filtration décroissante sur les groupes de Chow de chaque variété projective lisse qui, d'une part, s'arrête après un nombre fini d'étapes et qui, d'autre part, est respectée par les correspondances et est contrôlée par la cohomologie.

Conjectures de Beilinson. *(cf. [35]) Pour une variété projective lisse* $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ *de dimension* n*, il existe sur* $\mathrm{CH}^l(X)$, $0 \leq l \leq n$*, une filtration* F^ν $(\nu \leq 0)$ *décroissante avec les propriétés suivantes :*

(i) $F^0 = \mathrm{CH}^l(X)$, $F^1 = \mathrm{CH}^l_{\mathrm{hom}}(X)$.

(ii) $F^r \cdot F^s \subset F^{r+s}$ *où* $\cdot$ *est le produit d'intersection.*

(iii) F^* *est fonctorielle pour les morphismes* $f : X \to Y$.

(iv) En supposant que les composantes de Künneth $[\Delta_X]^{2n-j,j} \in H^{n,n}(X \times X, \mathbb{Q})$ *de la classe de cohomologie de la diagonale sont algébriques, données par les classes de* $p_j \in \mathcal{Z}^n(X \times X, \mathbb{Q})$*, alors* $p_{j*}Gr^\nu_{F^*}\,\mathrm{CH}^l(X) = \delta_{j,2l-\nu} Id_{Gr^\nu_{F^*}\,\mathrm{CH}^l(X)}$.

(v) $F^m = 0$ *pour* $m >> 0$ *(version faible) ou* $F^{l+1} = 0$ *(version forte).*

1.2.2 Décomposition de Chow–Künneth absolue et conjectures de Murre

Définition 1.2.1. *([51, Sec. 4.2.3,p. 144], [55, Def. 6.1.1, p. 67])*

Soit $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ *une variété projective lisse de dimension* n*. On dit que* X *a une décomposition de Chow–Künneth si il existe, pour* $0 \leq j \leq 2n$*, des cycles* $p_j \in \mathrm{CH}_n(X \times X)$ *tels que*

1. $p_j p_k = \delta_{j,k} p_j$*, i.e.* p_j *sont des projecteurs, deux à deux orthogonaux,*
2. $\sum_{j=0}^{2n} p_j = \Delta_X \in \mathrm{CH}_n(X \times X)$*, où* Δ_X *désigne la classe de la diagonale* $\Delta_X \subset X \times X$*,*
3. $[p_j]_{\mathrm{hom}} = [\Delta_X]^{2n-j,j}$*, où* $[\Delta_X]^{2n-j,j} \in H^{n,n}(X \times X, \mathbb{Q})$ *désigne la* $j^{\text{ième}}$ *composante de Künneth de la classe de cohomologie de la diagonale. De façon équivalente, l'action de* p_j *sur la cohomologie est* $p_{j,*}H^k(X) = \delta_{j,k} I|_{H^k(X)}$.

Définition 1.2.2. *On dit qu'une décomposition de Chow–Künneth d'une variété projective lisse* X *est auto-duale si, pour tout* $0 \leq j \leq 2d_X$*, on a* $p_j(X) = {}^t p_{2d_X - j}(X)$.

Définition 1.2.3. *([51, Sec. 4.3.2.1, p. 149], [55, Sec. 7.2 p. 85]) Pour une variété projective lisse* $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ *de dimension* n*, Murre a énoncé une série de conjectures :*

- *I (Existence)* X *admet une décomposition de Chow–Künneth donnée par des projecteurs orthogonaux* p_j*, pour* $0 \leq j \leq 2n$.
- *II Pour tout* $0 \leq l \leq n$*, les projecteurs* p_0*,...,* p_{l-1} *et* p_{2l+1}*,...,* p_{2n} *agissent par zéro sur* $\mathrm{CH}^l(X)$.
- *III Pour tout* $0 \leq l \leq n$, $\ker(p_{2l}) = \mathrm{CH}^l(X)_{\mathrm{hom}}$*. (Notons que clairement* $\ker(p_{2l}) \subset \mathrm{CH}^l(X)_{\mathrm{hom}}$ *)*
- *IV Pour tout* $0 \leq l \leq n$*, la filtration sur* $\mathrm{CH}^l(X)$*, définie par* $F^p\,\mathrm{CH}^l(X) = \ker(p_{2l}) \cap \ker(p_{2l-1}) \cap ... \cap \ker(p_{2l-p+1})$*, est indépendante du choix de la décomposition de Chow–Künneth.*

Jannsen [35] a en effet montré que les quatre conjectures de Murre sont vérifiées pour toute variété projective lisse si et seulement si la filtration de Bloch–Beilinson existe.

Tout d'abord, une filtration de Bloch–Beilinson est unique, c'est pour cela on parle de *la* filtration de Bloch–Beilinson. Ceci est une conséquence de [35, proposition 5.7] : Pour $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$, une filtration décroissante sur $\mathrm{CH}^l(X)$, $0 \leq l \leq d_X$ qui est comptaible avec l'action des correspondances, est contrôlée par la cohomologie et s'arrête après un nombre fini d'étapes est unique.

Le fait que les conjectures de Murre I, II et III pour toutes les variétés projectives lisses donnent la filtration de Bloch–Beilinson est une conséquence des résultats suivants :

1. Soit $\{p_j\}_{0\leq j\leq 2d_X}$ une décomposition de Chow–Künneth d'une variété projective lisse $X \in \mathrm{PSmVar}(k)$ donnée par des projecteurs $p_j \in \mathrm{CH}_{d_X}(X\times X)$. L'égalité $\Delta_X = \sum_{j=0}^{2d_X} p_j \in \mathrm{CH}_{d_X}(X\times X)$ et la conjecture de Murre II pour X impliquent que la filtration $F^k\,\mathrm{CH}^l(X) := \ker(p_{2l}) \cap \ker(p_{2l-1}) \cap \ldots \cap \ker(p_{2l-p+1})$ s'arrête à l'ordre $l+1$, i.e. $F^{l+1}\,\mathrm{CH}(X) = 0$. On obtient donc la versiin forte de (v). Cette formule montre aussi que la conjecture III(X) partie (i) des conjectures de Beilinson.
2. Le point clé de l'argument est le résultat suivant

   Proposition.([35, Prop. 5.8], [55, Prop. 7.5.2]) Soit $\{p_j\}_{0\leq j\leq 2d_X}$ une décomposition de Chow–Künneth d'une variété projective lisse $X \in \mathrm{PSmVar}(k)$ donnée par des projecteurs $p_j \in \mathrm{CH}_{d_X}(X\times X)$. Soit $\{q_j\}_{0\leq j\leq 2d_Y}$ une décomposition de Chow–Künneth d'une autre variété projective lisse $Y \in \mathrm{PSmVar}(k)$ donnée par des projecteurs $q_j \in \mathrm{CH}_{d_Y}(Y\times Y)$. On note $M_i = (X, p_i, 0)$ et $N_j = (Y, q_j, 0)$. Si la décomposition de Chow–Künneth de $X\times Y$ donnée par les projecteurs $r_k(p,q) = \sum_{j=0}^{k} p_j \times q_{k-j} \in \mathrm{CH}_{d_X+d_Y}(X\times Y\times X\times Y)$ vérifie les conjecture de Murre II et III, on a

   $$\mathrm{Hom}(M_i, N_j) = \begin{cases} 0 & i<j \\ \mathrm{Hom}(M_i^{\mathrm{hom}}, N_j^{\mathrm{hom}}) & i=j \end{cases}$$

   où $M_i^{\mathrm{hom}} = (X, p_i^{\mathrm{hom}}, 0)$ et $M_i^{\mathrm{hom}} = (Y, q_j^{\mathrm{hom}}, 0)$ sont les motifs modulo équivalence homologique.
3. En utilisant la formule [35, (5.30)]

   $$F^\nu\,\mathrm{CH}^j(X)_{\mathbb{Q}} = \oplus_{i=0}^{2j-\nu}\,\mathrm{CH}^j(M_i)_{\mathbb{Q}}$$

   on montre que les filtrations sur $\mathrm{CH}(X)$ $\mathrm{CH}(Y)$ donnée par les projecteurs p_i et q_j sont compatibles avec l'action des correspondances de $\mathrm{CH}(X\times Y)$ donc en particulier avec l'action de tout morphisme $X \to Y$. On obtient ainso la partie (iii) des conjectures de Beilinson.
4. En utilisant la formule $Z_1\cdot Z_2 = \Delta_X^*(Z_1\times Z_2)$, l'étape précédente et les conjectures de Murre pour $X\times X\times X$ on montre que la filtration est compatible avec le produit d'intersection (partie (iii) des conjectures de Beilinson).
5. Finalement, pour la partie (iv) on utilise la formule [loc.cit., p. 295]

   $$\mathrm{Gr}_F^\nu\,\mathrm{CH}^j(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^j(M_{2j-\nu})_{\mathbb{Q}} = p_{2j-\nu}\,\mathrm{CH}^j(X)_{\mathbb{Q}}.$$

Le fait que l'existence de la filtration de Bloch–Beilinson implique les conjectures de Murre se déduit des résultats suivants :
- — [35, lemme 5.4] donne alors l'existence d'une décomposition de Chow–Künneth.
- — La conjecture IV suit de l'unicité d'une filtration contrôlée par la cohomologie (cf. [35, proposition 5.5]).

La proposition suivante est une conséquence immédiate du Lemme 1.1.33.

Proposition 1.2.4. *Si une variété projective lisse $X \in \mathrm{PSmVar}(k)$ de dimension n admet une décomposition de Chow–Künneth donnée par les projecteurs orthogonaux $p_j \in \mathrm{CH}_n(X\times X)$, alors on a un isomorphisme de motifs de Chow :*

$$\mathrm{ch}(X) = (X, \Delta_X) \tilde{\to} \bigoplus_{j=0}^{2n} (X, p_j).$$

De plus, $\mathrm{CH}(X) = \bigoplus_{j=0}^{2k} p_{j*}\,\mathrm{CH}(X)$.

Démonstration. Cela découle du lemme 1.1.33, qui dit que si $p_1, p_2 \in \mathrm{CH}_n(X\times X)$ sont deux projecteurs orthogonaux, i.e. $p_1p_2 = p_2p_1 = 0$, alors on a un isomorphisme de motifs $(X, p_1+p_2)\tilde{\to}(X,p_1)\oplus(X,p_2)$. Pour une décomposition de Chow–Künneth de X donnée par des projecteurs p_j, $\Delta_X = \sum_{j=0}^{2k} p_j \in \mathrm{CH}_n(X\times X)$ et les projecteurs p_j sont 2 à 2 orthogonaux. On en déduit que

$$(X, \Delta_X) = (X, \sum_{j=0}^{2k} p_j) \tilde{\to} \bigoplus_{j=0}^{2k} (X, p_j).$$

L'action sur les groupes de Chow appliquée à cet isomorphisme de motifs donne $\mathrm{CH}(X) = \Delta_{X*}\,\mathrm{CH}(X) = \oplus_{j=0}^{2k} {p_j}_*\,\mathrm{CH}(X)$. □

1.2.3 Exemples de variétés satisfaisant à des conjectures de Murre

Exemple 1.2.5. *1. Les courbes projectives lisses satisfont aux conjectures de Murre : Soit C une courbe projective lisse. On considère les projecteurs $p_0(C)$ et $p_2(C)$ comme ci-dessus, formule (1.1.1), on pose $p_1(C) = \Delta_C - p_0(C) - p_2(C)$, et alors les projecteurs $p_0(C)$, $p_1(C)$ et $p_2(C)$ constituent une décomposition de Chow–Künneth auto-duale qui satisfait aux conjectures de Murre II et III. De plus, une courbe projective lisse satisfait à la conjecture de Murre IV.*

2. *Pour les surfaces projectives lisses, Murre a construit une décomposition de Chow–Künneth : Soit S une surface projective lisse. On considère les projecteurs $p_0(S)$ et $p_4(S)$ comme ci-dessus (1.1.1) ainsi que les projecteurs de Picard et d'Albanese $p_1(S)$ et $p_3(S)$ (1.1.2), que l'on normalise : $p_1(S)^N = p_1(S) - \frac{1}{2}p_1(S)p_3(S)$ et $p_3(S)^N = p_3(S) - \frac{1}{2}p_1(S)p_3(S)$. On pose $p_2(S) = \Delta_S - p_0(S) - p_1(S)^N - p_3(S)^N - p_4(S)$, alors les projecteurs $p_0(S)$, $p_1(S)^N$, $p_2(S)$, $p_3(S)^N$ et $p_4(S)$ constituent une décomposition de Chow–Künneth auto-duale qui satisfait aux conjectures de Murre II et III.*

3. *Soit $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ une variété projective lisse de dimension d telle que $H^i(X)$ est algébrique pour tout $i \neq d$. Alors X admet une décomposition de Chow–Künneth auto-duale ([55, Appendice C, p. 83]). En particulier, les intersections complètes dans l'espace projectif admettent une décomposition de Chow–Künneth : soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une intersection complète lisse de dimension d, soient $L_{N-d+i} \subset \mathbb{P}^N$ des sous espaces linéaires de dimension $N-d+i$, pour $0 \leq i \leq d$, et $\xi_i = X \cap L_i$ les sections linéaires associées. Les cycles $p_{2i}(X) = [\xi_i \times \xi_{d-i}] \in \mathrm{CH}_d(X \times X)$ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux. On pose $p_\infty(X) = \Delta_X - \sum_{i=0}^d p_i(X)$. Alors, si d est impair, les projecteurs $p_0(X), ..., p_{2d}(X), p_\infty(X)$ constituent une décomposition de Chow–Künneth qui satisfait aux conjectures de Murre II et III, et si d est pair alors les projecteurs $p_0(X), ..., p_d(X) + p_\infty(X), ..., p_{2d}(X)$ constituent une décomposition de Chow–Künneth auto-duale qui satisfait aux conjectures de Murre II et III.*

4. *Si une variété projective lisse $X \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ de dimension n admet une décomposition de Chow–Künneth donnée par des projecteurs $p_0, \ldots, p_{2n}$, alors $X \times X$ admet une décomposition de Chow–Künneth auto-duale, donnée par les projecteurs $q_r = \sum_{i+j=r} p_i \times p_j \in \mathrm{CH}^{2n}(X \times X \times X \times X)$ pour $0 \leq r \leq 4n$.*

5. *Les variétés abéliennes admettent une décomposition de Chow–Künneth auto-duale ([70], [20]).*
6. *Les variétés uniréglées de dimension 3 admettent une décomposition de Chow–Künneth auto-duale ([1]), et aussi certaines classes de variétés de dimension 3 avec une condition spéciale sur $H^2_{\mathrm{trans}}(X)$ admettent une décomposition de Chow–Künneth auto-duale ([2], [52]).*
7. *Certaines variétés elliptiques modulaires admettent une décomposition de Chow–Künneth ([26]).*

1.3 Correspondances et motifs relatifs

Soit $T \in \mathrm{Var}\,(k)$ une variété algébrique sur k. On désigne par $\mathrm{Var}\,(k, T/k)$ la catégorie dont les objets sont les variétés X sur k munies d'un morphisme propre $f_X : X \to T$, les morphismes entre deux objets $f_X : X \to T$ et $f_Y : Y \to T$ étant les morphismes $f : X \to Y$ tels que $f_X = f_Y \circ f$. On désigne par $\mathrm{PSmVar}\,(k, T/k) \subset \mathrm{SmVar}\,(k, T/k) \subset \mathrm{Var}\,(k, T/k)$ les sous-catégorie pleines formées par les variétés qui sont lisses sur k, resp. projectives lisses sur k.

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1. *Soient $X, Y, S \in \mathrm{Var}\,(k)$ et $f_{X/S} : X \to S$, $f_{Y/S} : Y \to S$ deux morphismes.*
— *On définit le groupe des correspondances relatives de X vers Y par*

$$\mathrm{Corr}_S(X, Y) := \mathrm{CH}\,(X \times_S Y)_{\mathbb{Q}}.$$

— *Si $Y = Y_e$ est irréductible de dimension e, on définit le degré d'une correspondance relative par*

$$\mathrm{Corr}^r_S(X, Y_e) = \mathrm{CH}_{e-r}(X \times_S Y)_{\mathbb{Q}}.$$

— *Si Y est lisse, alors $Y = \sqcup Y_i$ avec $Y_i = Y_{e_i}$ et on définit*

$$\mathrm{Corr}_S^r(X,Y) = \oplus_i \mathrm{CH}_{e_i - r}(X \times_S Y_{e_i})_{\mathbb{Q}}.$$

La composition de correspondances relatives (voir [18]) est définie comme suit :

Définition 1.3.2. *Soient $X, Z, S \in \mathrm{Var}(k)$, $Y \in \mathrm{SmVar}(k)$ et $X \to S$, $Y \to S$, $Z \to S$ trois morphismes propres. Soit $\Gamma_1 \in \mathrm{Corr}_S(X,Y)$, $\Gamma_2 \in \mathrm{Corr}_S(Y,Z)$. On considère alors $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \in \mathrm{CH}((X \times_S Y) \times (Y \times_S Z))$ et $\delta = \Delta(Y) : Y \hookrightarrow Y \times Y$ le plongement diagonal. Puisque Y est lisse, δ est un plongement régulier (localement intersection complète), donc*

$$\delta^! : \mathrm{CH}((X \times_S Y) \times_k (Y \times_S Z)) \to \mathrm{CH}(X \times_S Y \times_S Z)$$

est bien défini via le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \times_S Z \arrow[r, hook] \arrow[d] & (X \times_S Y) \times_k (Y \times_S Z) \arrow[d] \\ Y \arrow[r, hook, "\delta"] & Y \times_k Y \end{tikzcd}$$

On définit alors

$$\Gamma_2 \circ \Gamma_1 = p_{X,Z*}\delta^![\Gamma_1 \times \Gamma_2],$$

où $p_{X,Z} : X \times_S Y \times_S Z \to X \times_S Z$ est la projection ($p_{X,Z}$ est propre).

Remarque 1.3.3. *On voit que si $\Gamma_1 \in \mathrm{Corr}_S^r(X,Y)$ et $\Gamma_2 \in \mathrm{Corr}_S^s(Y,Z)$, alors $\Gamma_2 \circ \Gamma_1 \in \mathrm{Corr}_S^{r+s}(X,Z)$.*

L'action d'une correspondance relative est définie comme suit :

Définition 1.3.4. *Soient $Y, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$, $X \in \mathrm{SmVar}(\mathbb{C})$ et $f : X \to S$, $g : Y \to S$ deux morphismes tels que f soit propre. Une correspondance relative $\Gamma \in \mathrm{Corr}_S^r(X,Y)$ induit le morphisme $\Gamma_* : \mathrm{CH}^l(X) \to \mathrm{CH}^{l+r}(Y)$ qui est défini par*

$$\Gamma_*\alpha = p_{Y*}\delta_X^![\alpha \times \Gamma],$$

où $\delta_X : X \times_S Y = S \times_S X \times_S Y \hookrightarrow S \times_S X \times X \times_S Y$ désigne l'inclusion de la diagonale.

Remarque 1.3.5. *Si X et Y sont projective lisse, l'action relative de Γ coïncide avec l'action absolue.*

Définition-Proposition 1.3.6. *[18] Soient $X, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$, $Y \in \mathrm{SmVar}(\mathbb{C})$ et $f : X \to S$, $g : Y \to S$ deux morphismes tels que g soit propre.*

Une correspondance relative $\Gamma \in \mathrm{Corr}_S^r(X,Y)$ induit un morphisme $\Gamma_* : Rf_{X*}\mathbb{Q}_S \to Rf_{Y*}\mathbb{Q}_S[2r]$ dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}_c^b(S)$ des faisceaux constructibles de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur S via le morphisme

$$\mathrm{Corr}_S(X,Y) \to H^{BM}_{2d_Y - r}(X \times_S Y, \mathbb{Q}) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{D_c^b(\mathbb{Q}_S)}(Rf_*\mathbb{Q}_S, Rg_*\mathbb{Q}_S[2r]).$$

Le morphisme $\Gamma_* : R^if_*\mathbb{Q}_S \to R^{i+2r}g_*\mathbb{Q}_S$ induit par $\Gamma_* : Rf_{X*}\mathbb{Q}_S \to Rf_{Y*}\mathbb{Q}_S[2r]$ sur la cohomologie en degré i peut être décrit de la façon suivante. Soit $V \subset S$ un ouvert contractile. On note $X_V = f^{-1}(V)$. Si $\alpha \in \Gamma(V, R^if_*\mathbb{Q}_S) = H^i(X_V, \mathbb{Q})$, alors $\Gamma_*\alpha = p_{Y_V*}((p^*_{X_V}\alpha) \cap [\Gamma]) \in H^{i+2r}(Y_V, \mathbb{Q})$. On précise que :
- *$p^*_{X_V} : H^i(X_V, \mathbb{Q}) \to \in H^i(X_V \times_V Y_V, \mathbb{Q})$,*
- *$[\Gamma] \in H^{BM}_{2d_Y - r}(X_V \times_V Y_V, \mathbb{Q})$,*
- *$p_{X_V} : X_V \times_V Y_V \to X_V$ et $p_{Y_V} : X_V \times_V Y_V \to Y_V$ désignent les projections.*
- *Puisque g est propre, p_{Y_V} est aussi propre, donc*
  $p_{Y_V*} : H^{BM}_{2d_Y - r - i}(X_V \times_V Y_V, \mathbb{Q}) \to H^{BM}_{2d_Y - r - i}(Y_V, \mathbb{Q})$ est bien défini.
- *Enfin, comme Y_V est lisse, on peut appliquer la dualité de Poincaré à $H^{BM}_{2d_Y - r - i}(Y_V, \mathbb{Q})$.*

On définit, à l'aide de la composition des correspondances relatives, la catégorie additive des correspondances relatives :

Définition 1.3.7. *Soit $S \in \mathrm{QPVar}\,(k)$ une variété quasi-projective. La catégorie $\mathrm{Corr}\,(\mathrm{SmVar}\,(k, S/k))$ a les mêmes objets que $\mathrm{SmVar}\,(k, S/k)$, i.e. les variétés algébriques X lisses sur k, munies d'un morphisme propre $f_{X/S} : X \to S$ vers S, et les morphismes sont $\mathrm{Hom}\,(X, Y) := \mathrm{Corr}_S(X, Y)$. C'est une catégorie additive avec $X \oplus Y = X \sqcup Y$, $f_{X \sqcup Y/S} = f_{X/S} \sqcup f_{Y/S} : X \sqcup Y \to S$. De même $\mathrm{Corr}^0(\mathrm{SmVar}\,(k, S/k)) \subset \mathrm{Corr}\,(\mathrm{SmVar}\,(k, S/k))$ est la sous-catégorie dont les objets $\mathrm{SmVar}\,(k, S/k)$ sont les variétés algébriques lisses sur k munies d'un morphisme propre vers S, et les morphismes sont $\mathrm{Hom}\,(X, Y) := \mathrm{Corr}^0_S(X, Y)$.*

Remarque 1.3.8.
- *$\mathrm{Corr}^0_S(-, -)$ respecte les degrés.*
- *Les correspondances relatives agissent sur les groupes de Chow et sur la cohomologie.*
- *Via la composition de correspondances relatives, $\mathrm{Corr}_S(X, X)$ devient un anneau et $\mathrm{Corr}^0_S(X, X)$ est un sous-anneau de $\mathrm{Corr}_S(X, X)$.*

Définition 1.3.9. *Soient $S \in \mathrm{QPVar}\,(k)$, $X \in \mathrm{SmVar}\,(k)$ et $f_{X/S} : X \to S$ un morphisme propre. Une correspondance relative $p \in \mathrm{Corr}^0_S(X, X)$ est appelée projecteur relatif de X si $p \circ p = p$. On dit que deux projecteurs $p, q \in \mathrm{Corr}^0_S(X, X)$ sont orthogonaux si $p \circ q = q \circ p = 0$.*

Pour une variété quasi-projective S, on définit la catégorie des motifs relatifs $\mathcal{M}(S)$ comme suit :

Motifs relatifs effectifs

Soit $S \in \mathrm{QPVar}\,(k)$. La catégorie $\mathcal{M}^+(S)$ des motifs relatifs effectifs a pour objets les paires (X, p) où $X \in \mathrm{SmVar}\,(k, S/k)$ et p un projecteur de X, et a pour morphismes, si $M = (X, p)$ et $N = (Y, p)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^+(S)}(M, N) &:= q \circ \mathrm{Corr}^0_S(X, Y) \circ p \\ &= \left\{\Gamma \in \mathrm{Corr}^0_S(X, Y), \Gamma \circ p = q \circ \Gamma\right\} / \left\{\Gamma | q \circ \Gamma = \Gamma \circ p = 0\right\}. \end{aligned}$$

Motifs relatifs

Soit $S \in \mathrm{QPVar}\,(k)$. On définit la catégorie $\mathcal{M}(S)$ des motifs relatifs comme la catégorie dont les objets sont les triplets (X, p, m), où $X \in \mathrm{SmVar}\,(k, S/k)$, p est un projecteur de X et $m \in \mathbb{Z}$, et dont les morphismes entre $M = (X, p, m)$ et $N = (Y, p, n)$ sont définis par

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(S)}(M, N) :&= q \circ \mathrm{Corr}^{n-m}_S(X, Y) \circ p \\ &= \left\{\Gamma \in \mathrm{Corr}^{n-m}_S(X, Y), \Gamma \circ p = q \circ \Gamma\right\} / \left\{\Gamma \circ p = 0\right\}. \end{aligned}$$

Clairement $\mathcal{M}^+(S) \subset \mathcal{M}(S)$ est une sous-catégorie pleine via $(X, p) \to (X, p, 0)$.

Lemma 1.3.10. *Soient $S \in \mathrm{QPVar}\,(k)$, $X \in \mathrm{SmVar}\,(k)$ et $f_{X/S} : X \to S$ un morphisme propre. Si $p, q \in \mathrm{CH}_{d_X}(X \times_S X)$ sont deux projecteurs orthogonaux (i.e. $pq = qp = 0$), alors on a un isomorphisme de motifs relatifs*

$$(X, p + q) \tilde{\to} (X, p) \oplus (X, q).$$

Démonstration.
C'est l'analogue relatif du lemme 1.1.33. La démonstration est similaire : il suffit de remarquer que $\Delta^1_X, \Delta^2_X \subset X \times_S (X^{(1)} \sqcup X^{(2)})$ et ${}^1\Delta_X, {}^2\Delta_X \subset (X^{(1)} \sqcup X^{(2)}) \times_S X$ sont des correspondances relatives.

□

Proposition 1.3.11. *La composition de correspondances relative est compatible avec les changements de base plats $S' \to S$ [55, Lem. 8.1.6]. Il existe donc un foncteur $\mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(k)$ de la catégorie des motifs de Chow au-dessus de S vers la catégorie des motifs (absolus) de Chow.*

Principe d'identité de Manin

Soient $X, Y \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$. Le critère de Manin est un critère immédiat qui dit quand $\Gamma \in \mathrm{Corr}_{\sim}(X,Y)$ et $\Gamma' \in \mathrm{Corr}_{\sim}(X,Y)$ sont égales. Le critère se résume par les équivalences suivantes :

Théorème 1.3.12. *[55, §2.8, p.33] Soient $X, Y \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ et $\Gamma, \Gamma' \in \mathrm{Corr}_{\sim}(X,Y)$. On note*

$$\Gamma_T : C_{\sim}(T \times X) := \mathrm{Corr}_{\sim}(T \times X) \to C_{\sim}(T \times Y) := \mathrm{Corr}_{\sim}(T \times Y)$$

l'action induite. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :
— $\Gamma = \Gamma'$.
— *Pour tout $T \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$, $\Gamma_T = \Gamma'_T$.*
— $\Gamma_X = \Gamma'_X$.

Ce principe permet d'identifier une correspondance $\Gamma \in \mathrm{Corr}_{\sim}(X,Y)$ pour $X, Y \in \mathrm{PSmVar}\,(k)$ via son action universelle $\Gamma_T : C_{\sim}(T \times X) := \mathrm{Corr}_{\sim}(T \times X) \to C_{\sim}(T \times Y) := \mathrm{Corr}_{\sim}(T \times Y)$. On l'utilise pour calculer le motif d'un fibré projectif ou d'un éclatement d'une variété de $\mathrm{PSmVar}\,(k)$ en une sous-variété lisse. Ce principe montre aussi que si $i : X \hookrightarrow Y$ est un plongement régulier de codimension r de variétés de $\mathrm{PSmVar}\,(k)$, alors $\Gamma_i^t \circ \Gamma_i = \Delta_X(c_r(N_{X,Y}))$, où $\Delta_X : X \hookrightarrow X \times X$ est le plongement diagonal.

La proposition suivante calcule certaines compositions de correspondances relatives :

Proposition 1.3.13. *Soient $X, Y, S \in \mathrm{SmVar}\,(k)$ et soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des morphismes plats. On note $d_X = \dim X$, $d_Y = \dim Y$, $d_S = \dim S$. Soient $\Gamma_1 \in \mathrm{Corr}_S^{\,p}(S,Y) \cong \mathrm{CH}_{d_Y - p}(Y)$ et $\Gamma_2 \in \mathrm{Corr}^{\,q}(X,S) \cong \mathrm{CH}_{d_S - q}(X)$ des correspondances relatives. Alors*

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = [\Gamma_2 \times_S \Gamma_1] \in \mathrm{Corr}_S^{\,p+q}(X,Y) \cong \mathrm{CH}_{d_Y - p - q}(X \times_S Y).$$

Démonstration. Puisque S est lisse, le plongement $\delta : S \hookrightarrow S \times S$ est régulier. Rappelons que la composition $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ est définie en utilisant le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \cong X \times_S S \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & (X \times_S S) \times_k (S \times_S Y) = X \times_k Y \arrow[d, "f \times g"] \\ S \arrow[r, "\delta"] & S \times_k S. \end{tikzcd}$$

On a $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = (p_{XY})_*(\delta^!(\Gamma_2 \times_k \Gamma_1)$ où $p_X Y : X \times_S S \times_S Y \to X \times_S Y$ est la projection. Dans notre cas p_{XY} est un isomorphisme et le diagramme ci–dessus s'identifie au diagramma cartésien

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d] & X \times_k Y \arrow[d, "f \times g"] \\ S \arrow[r, "\delta"] & S \times_k S. \end{tikzcd}$$

Puisque f et g sont plats, le morphisme δ' est un plongement régulier [24, Appendix B.7.4]. On a donc par [loc.cit., Rmk. 6.2.1]

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \circ \Gamma_2 &= \delta^!(\Gamma_2 \times_k \Gamma_1) \\ &= (\delta')^*(\Gamma_2 \times_k \Gamma_1) \\ &= \Gamma_2 \times_S \Gamma_1. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.3.14. *Soient X, Y, X', $Y' \in \mathrm{SmVar}\,(k)$, $S \in \mathrm{QPVar}\,(k)$ et $f_X : X \to S$, $f_Y : Y \to S$, $f_{X'} : X' \to S$, $f_{Y'} : Y' \to S$ des morphismes propres. Soient $\Gamma \in \mathrm{Corr}_S(X,Y)$, $\Gamma_1 \in \mathrm{Corr}_S(X,X')$, $\Gamma_2 \in \mathrm{Corr}_S(Y,Y')$. Supposons que $X \times_S Y$ soit lisse. Alors on a l'égalité de correspondances relatives $(\Gamma_1 \times_S \Gamma_2)_* \Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma \circ \Gamma_1^t$, le premier terme étant l'action d'une correspondance relative (cf. [26] pour la définition).*

1.3.2 Décomposition de Chow–Künneth relative

Soient $X, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ et $f : X \to S$ un morphisme propre. D'après [10], on a une décomposition

$$Rf_*\mathbb{Q} \tilde{\to} \oplus_i \ {}^pR^if_*\mathbb{Q}[-i] \tag{1.3.1}$$

dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b_c(S)$ des faisceaux constructibles de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur S, où ${}^pR^jf_*\mathbb{Q}_X$ désigne la j^{ieme} cohomologie perverse de $Rf_*\mathbb{Q}_X$.

Si $X \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$, $Y \in \mathrm{SmVar}(\mathbb{C})$ et $f_X : X \to S$, $f_Y : Y \to S$ sont des morphismes propres, la Définition-Proposition 1.3.6 dit qu'une correspondance relative $\Gamma \in \mathrm{CH}(X \times_S Y)$ de degré zéro induit un morphisme $\Gamma_* : Rf_{X*}\mathbb{Q}_X \to Rf_{Y*}\mathbb{Q}_Y$ dans $\mathcal{D}^b_c(S)$. En particulier on obtient des morphismes $\Gamma_* :{}^p R^jf_*\mathbb{Q}_X \to {}^pR^jf_*\mathbb{Q}_Y$ pour tout j.

Définition 1.3.15. *([51, sect. 4.4.2.2, p. 160], [55, Def. 8.3.3, p. 112]) Soit $S \in \mathrm{QPVar}(\mathbb{C})$, $X \in \mathrm{SmVar}(\mathbb{C})$ de dimension $d_X = n$ et $f : X \to S$ un morphisme projectif. Soit k la dimension de la fibre générique. On dit que f a une décomposition de Chow–Künneth relative au sens faible si il existe $p_i \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$, $0 \le i \le 2k$, tels que*

1. *$p_ip_j = \delta_{i,j}p_i$, i.e. p_i sont des projecteurs relatifs, deux à deux orthogonaux,*
2. *$\sum_i p_i = \Delta_X \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$,*
3. *$p_{i*}{}^pR^jf_*\mathbb{Q}_X = \delta_{i,j}I_{{}^pR^jf_*\mathbb{Q}_X}$.*

Proposition 1.3.16. *Soient $S \in \mathrm{QPVar}(\mathbb{C})$, $X \in \mathrm{SmVar}(\mathbb{C})$ de dimension $d_X = n$ et $f : X \to S$ un morphisme projectif. Soit k la dimension de la fibre générique. Si f a une décomposition de Chow–Künneth relative donnée par des projecteurs relatifs $p_j \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$, $0 \le j \le 2k$, alors on a un isomorphisme de motifs de Chow relatifs*

$$\mathrm{ch}(X/S) = (X, \Delta_X) \tilde{\to} \bigoplus_{j=0}^{2k}(X, p_j).$$

De plus, si $X \in \mathrm{PSmVar}(\mathbb{C})$ est projective, $\mathrm{CH}(X) = \bigoplus_{j=0}^{2k} {p_j}_* \mathrm{CH}(X)$.

Démonstration. Cela découle du Lemme 1.3.10, qui dit que si $p_1, p_2 \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ sont deux projecteurs orthogonaux, i.e. $p_1p_2 = p_2p_1 = 0$, alors on a un isomorphisme de motifs relatifs $(X, p_1 + p_2)\tilde{\to}(X, p_1) \oplus (X, p_2)$. Pour une décomposition de Chow–Künneth relative de $X \to S$ donnée par des projecteurs p_j, on a $\Delta_X = \sum_{j=0}^{2k} p_j \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$, et les projecteurs p_j sont 2 à 2 orthogonaux , On en déduit que

$$(X, \Delta_X) = (X, \sum_{j=0}^{2k} p_j) \tilde{\to} \bigoplus_{j=0}^{2k}(X, p_j).$$

De plus, si X est projective, l'action sur la cohomologie appliquée à cet isomorphisme donne $\mathrm{CH}(X) = {\Delta_X}_* \mathrm{CH}(X) = \oplus_{j=0}^{2k}{p_j}_* \mathrm{CH}(X)$. □

Remarque 1.3.17. *Comme les faisceaux pervers ${}^pR^jf_*\mathbb{Q}_X$ admettent une décomposition en somme directe de complexes d'intersections, on peut raffiner la décomposition 1.3.1. Une décomposition de Chow–Künneth au sens fort est donnée par une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux qui induisent cette décomposition raffinée. Dans le cas des fibrés en quadriques de dimension impaire que l'on regarde dans le chapitre suivant, les deux notions coïncident.*

1.3.3 Exemples

Motif de Lefschetz et motif de Tate relatifs

Soit S une variété quasi-projective. Le motif $\mathbb{L}_S = (S, \mathrm{id}_S, -1)$ est appelé motif de Lefschetz au-dessus de S. Le motif $\mathbb{T}_S = (S, \mathrm{id}_S, 1)$ est appelé motif de Tate au-dessus de S. On a ainsi $(X/S, p, m) = (X/S, p, 0) \otimes \mathbb{L}_S^{-m} = (X, p, 0) \otimes \mathbb{T}_S^m$.

Version perverse du théorème de Lefschetz faible relatif

Théorème 1.3.18. *[19, Thm. 2.6.4, p.561] Soient $X, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ et $f : X \to S$ un morphisme projectif, de sorte que $f : X \subset \mathbb{P}^N \times S \to S$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}^N$ et $H_X = (H \times S) \cap X$ la section hyperplane relative associée. Alors, l'application induite par l'inclusion $i : H_X \hookrightarrow X$ vérifie :*

$$i^* : {}^p\mathcal{H}^j(f_* IC_X) \to {}^p\mathcal{H}^{j+1}((f|_{H_X})_* IC_X) \begin{cases} \text{est un isomorphisme} & \text{si } j \leq -2 \\ \text{est injectif} & \text{si } j = -1. \end{cases}$$

Version perverse du théorème de Lefschetz difficile relatif

Théorème 1.3.19. *[19, Thm. 1.6.3, p.547] Soient $X, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ et $f : X \to S$ un morphisme projectif, de sorte que $f : X \subset \mathbb{P}^N \times S \to S$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}^N$ et $H_X = (S \times H) \cap X$ la section hyperplane relative associée. Alors, pour tout $i = 0, \dots, d_X - d_S$, la correspondance H_X induit un isomorphisme*

$$[H_X]^i : {}^p\mathcal{H}^{-i}(Rf_* IC_X) \xrightarrow{\simeq} {}^p\mathcal{H}^i(Rf_* IC_X).$$

Famille d'intersections complètes

Les familles d'hypersurfaces d'un espace projectif $\mathbb{P}^{N+1}_{\mathbb{C}}$ admettent une décomposition de Chow–Künneth relative au sens faible. Cela raffine la partie 3. de l'exemple 1.2.5, qui dit que les hypersurfaces lisses d'un espace projectif $\mathbb{P}^{N+1}_{\mathbb{C}}$ admettent une décomposition de Chow-Künneth.

Proposition 1.3.20. *Soit $S \in \mathrm{QPVar}(\mathbb{C})$, et $f : X \subset \mathbb{P}^{N+1} \times S \to S$ une famille d' hypersurfaces de degré d de $\mathbb{P}^{N+1}$ paramétrée par S telle que $X \in \mathrm{SmVar}(\mathbb{C})$. Soit, pour $i = 0, \dots, N$, $H^{i+1} \subset \mathbb{P}^{N+1}$ un sous-espace linéaire de dimension $i+1$ et $\xi_i = (H^{i+1} \times S) \cap X \subset X$ la sections linéaire relative associée. Les cycles algébriques*

$$p_{2i} = [\xi_i \times_S \xi_{N-i}] \in \mathrm{CH}_{N+d_S}(X \times_S X),$$

pour $i = 0, \dots, N$, sont des projecteurs relatifs tels que $p_{2i} \circ p_{2j} = 0$ pour $i > j$. Il est possible d'orthonormaliser la famille $\{p_{2i}\}_{0 \leq i \leq N}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt (cf. Lemme 2.2.5) pour obtenir la famille $\{p^N_{2i}\}_{0 \leq i \leq N}$. On pose

$$p_\infty := \Delta_X - \sum_{i=0}^{N} p^N_{2i} \in \mathrm{CH}_{N+d_S=d_X}(X \times_S X).$$

Alors $\{p^N_{2i}\}_{0 \leq i \leq N}, p_\infty$ constituent une décomposition de Chow–Künneth relative au sens faible de f.

Démonstration.
D'après la proposition 1.3.13, on a la composition suivante de correspondances relatives $p_{2i} = [\xi_{N-i}] \circ [\xi_i]^t$, où $[\xi_i]^t \in \mathrm{Corr}^{-i}_S(X, S) = \mathrm{CH}_{i+d_S}(X)$ et $[\xi_{N-i}] \in \mathrm{Corr}^i_S(S, X) = \mathrm{CH}_{N-i+d_S}(X)$. Donc

$$p_{2i} \circ p_{2j} = [\xi_{N-i}] \circ [\xi_i]^t \circ [\xi_{N-j}] \circ [\xi_j]^t,$$

avec $[\xi_i]^t \circ [\xi_{N-j}] \in \mathrm{Corr}_S(S, S) = \mathrm{CH}_{j-i}(S)$. On en déduit $p_{2i} \circ p_{2j} = 0$ si $i > j$.
D'après [10], puisque le morphisme f est projectif donc propre, on a une décomposition dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b_c(S)$ des faisceaux constructibles sur S :

$$Rf_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j=0}^{2N} {}^pR^j f_*\mathbb{Q}[-j].$$

Notons $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{N+1} \times S$ le plongement fermé et $g : \mathbb{P}^{N+1} \times S \to S$ le fibré projectif, de sorte que $f = g \circ \iota$. D'après les versions perverses des théorèmes de Lefschetz faible relatif et difficile relatif,
— ${}^pR^{2j+1} f_*\mathbb{Q} = 0$ pour tout entier j tel que $2j+1 \neq N$ et
— ${}^pR^{2j} f_*\mathbb{Q} = \iota^* R^{2j} g_*\mathbb{Q}$ pour tout entier j tel que $2j \neq N$.
Par construction on a

— $p_{2i*}|_{\iota^* R^{2j} g_*\mathbb{Q}} = \delta_{i,j} \operatorname{id} |_{\iota^* R^{2j} g_*\mathbb{Q}}$ pour tout entier j et donc
— $p^N_{2i*}|_{\iota^* R^{2j} g_*\mathbb{Q}} = \delta_{i,j} \operatorname{id} |_{\iota^* R^{2j} g_*\mathbb{Q}}$ pour tout entier j, donc $p^N_{2i*} |_{{}^p R^{2j} f_*\mathbb{Q}} = \delta_{i,j} \operatorname{id} |_{{}^p R^{2j} f_*\mathbb{Q}}$ pour tout entier j tel que $2j \neq N$.

De plus, par définition de p_∞, on a

$$\Delta_X = \sum_{i=0}^{2N} p^N_{2i} + p_\infty \operatorname{CH}_{N+d_S=d_X}(X \times_S X)$$

et p_∞ est orthogonal aux projecteurs p^N_{2i}. Donc $p_{\infty *} |_{{}^p R^j f_*\mathbb{Q}} = \delta_{N,j} \operatorname{id} |_{{}^p R^j f_*\mathbb{Q}}$.

$\square$

Remarque 1.3.21. *(i) Le projecteur $p_\infty \in \operatorname{CH}_{N+d_S=d_X}(X \times_S X)$ et le motif (X, p_∞) restent à priori mystérieux.*

(ii) Cela s'applique en particulier aux fibrés en quadriques $f : X \subset S \times \mathbb{P}^{N+1} \to S$. Le point important du chapitre 2 est d'identifier un tel projecteur p_∞ et le motif (X, p_∞) de façon explicite.

(iii) Comme dans le cas des quadriques, un fibré un hypersurfaces est une variété algébrique $X \in \operatorname{Var}(\mathbb{C})$ munie d'un morphisme projectif plat $f : X \to S$ de dimension relative N, $S \in \operatorname{Var}(\mathbb{C})$, de sorte qu'il existe un fibré projectif de rang $N+1$ $g : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ tel que $f : X \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ avec $f = g \circ i$, $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ étant le plongement fermé, et les fibres $X_s \subset \mathbb{P}^{N+1}$ étant des hypersurfaces. On a la même proposition en ne supposant pas le fibré $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}^{N+1} \times S$ trivial.

Chapter 2

Motives of quadric bundles

2.1 Introduction

Let $f : X \to S$ be a quadric bundle, i.e., f is a flat morphism whose fibers are quadrics. Throughout this paper we shall assume that S is a smooth, projective surface defined over $\mathbb{C}$ and that the fibers of f are odd–dimensional quadrics, say of dimension $2m-1$. Let $A^p(X) = \mathrm{CH}^p_{\mathrm{alg}}(X)$ be the Chow group of codimension p cycles algebraically equivalent to zero. In the case $S = \mathbb{P}^2$ Beauville [4] showed that

$$A^{m+1}(X) \cong \mathrm{Prym}\,(\tilde{C}/C)$$

is isomorphic to the Prym variety of the double covering $\tilde{C} \to C$, where C is the discriminant curve of f. In the case of conic bundles ($m = 1$) over a surface S Beltrametti and Francia [11] proved that

$$A^2(X)_{/Q} \simeq A^2(S)_{\mathbb{Q}} \oplus A^1(S)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathrm{Prym}\,(\tilde{C}/C)_{\mathbb{Q}}$$

where the subscript indicates tensor product with $\mathbb{Q}$. Nagel and Saito [56] obtained a motivic refinement of these results. They proved that the Chow motive $\mathrm{ch}\,(X)$ of a conic bundle over a surface admits a decomposition

$$\mathrm{ch}\,(X) \cong \mathrm{ch}\,(S) \oplus \mathrm{ch}\,(S)(-1) \oplus \mathrm{Pr}\,(\tilde{C}/C)(-1)$$

where (-1) denotes the Tate twist and $\mathrm{Pr}\,(\tilde{C}/C)$ is the "Prym motive". For a quadric bundle of relative dimension $2m-1$ over a surface S, Vial [77] has shown that there is a decomposition

$$\mathrm{ch}\,(X) \cong \oplus_{i=0}^{2m-1} \mathrm{ch}\,(S)(-i) \oplus M$$

where M is a Tate twist of a direct summand of the motive of a smooth, projective curve. In this paper we obtain a more precise result that identifies the motive M as the Prym motive of the double covering associated to the quadric bundle. We shall show that the Chow motive of a quadric bundle $f : X \to S$ of relative dimension $2m-1$ over a surface S admits a decomposition

$$\mathrm{ch}\,(X) \cong \oplus_{i=0}^{2m-1} \mathrm{ch}\,(S)(-i) \oplus \mathrm{Pr}\,(\tilde{C}/C)(-m) \tag{2.1.1}$$

where $\mathrm{Pr}\,(\tilde{C}/C)$ is the Prym motive of the associated double covering $\tilde{C} \to C$.

This theorem is proved by constructing a Chow–Künneth decomposition of X. This is done in two steps: first we construct a relative Chow–Künneth decomposition, and then we pass from the relative to the absolute Chow–Künneth decomposition. We now recall the basic definitions and outline the key steps of the proof in more detail.

Let S be a smooth, quasi–projective variety and let $\mathrm{Var}\,(S)$ be the category of smooth, quasi–projective varieties X equipped with a projective morphism $f : X \to S$. For $X, Y \in \mathrm{Var}\,(S)$ a relative correspondence from X to Y is an element $\Gamma \in \mathrm{CH}\,(X \times_S Y)$. We say that Γ has degree p if $\Gamma \in \mathrm{CH}_{d_Y - p}(X \times_S Y)$, where d_Y is the absolute dimension of Y. The composition of relative correspondences is defined as follows:

Definition 2.1.1. *(Corti-Hanamura [18]) Let $X, Y, Z \in \mathrm{Var}\,(S)$. Let $\Gamma_1 \in \mathrm{CH}\,(X \times_S Y)$, $\Gamma_2 \in \mathrm{CH}\,(Y \times_S Z)$ be relative correspondences. We define*

$$\Gamma_2 \circ \Gamma_1 = p_{X,Z,*}\delta^![\Gamma_1 \times \Gamma_2]$$

where $\delta = \Delta_Y : Y \hookrightarrow Y \times Y$ is the diagonal embedding and $p_{X,Z} : X \times_S Y \times_S Z \to X \times_S Z$ is the projection. Since Y is smooth, $\delta : Y \hookrightarrow Y \times Y$ is a regular embedding (local complete intersection), hence $\delta^!$ is well defined (see [24]). Moreover $p_{X,Z}$ is proper.

A relative projector on $X \in \mathrm{Var}\,(S)$ is a relative correspondence of degree 0 from X to X satisfying $p \circ p = p$. The category of Chow motives over S is the category whose objects are triples (X, p, m), with $X \in \mathrm{Var}\,(S)$, p a relative projector on X, and m an integer. A morphism from (X, p, m) to (Y, q, n) is a relative correspondence of degree $n - m$ from X to Y (see for example [55, Section 8.1.3]). The composition of relative correspondences is compatible with flat base change $S' \to S$ [55, Lemma 8.1.6]. Absolute motives over a field k are those for which the base is the spectrum of a field $S = \mathrm{Spec}\ k$. There exists a functor from the category of Chow motives over $S \in \mathrm{PVar}\,(k)$ to the category of (absolute) Chow motives over k.

Let X and S be smooth, projective varieties over $\mathbb{C}$ and $f : X \to S$ be a proper morphism. By [10] we have a decomposition

$$Rf_*\mathbb{Q} \simeq \oplus_i {}^pR^if_*\mathbb{Q}[-i]$$

in the derived category $\mathcal{D}^b_c(S)$ of constructible sheaves of $\mathbb{Q}$–vector spaces over S, where ${}^pR^jf_*\mathbb{Q}_X$ denotes the j^{th} perverse cohomology of $Rf_*\mathbb{Q}_X$.

Note that a relative projector q on X acts on the perverse cohomology ${}^pR^jf_*\mathbb{Q}_X$ by [18]. We denote the action by q_*.

Definition 2.1.2. *([51, sect. 4.4.2.2], [55, Def. 8.3.3])*

Let X and S be smooth, quasi–projective varieties over $\mathbb{C}$ and let $f : X \to S$ be a projective morphism. Let n be the dimension of X. Let k be the dimension of the generic fiber. We say that f has a relative Chow–Künneth decomposition if there exist $p_i \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$, $0 \le i \le 2k$, such that

1. *$p_ip_j = \delta_{i,j}p_i$ ie p_i are relative projectors, mutually orthogonal,*
2. *$\sum_i p_i = \Delta_X \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$*
3. *$p_{i,*} \mid_{{}^pR^jf_*\mathbb{Q}_X} = \delta_{i,j}I_{{}^pR^jf_*\mathbb{Q}_X}$.*

Remark 2.1.3. *Let X and S be smooth, quasi–projective varieties over $\mathbb{C}$ and $f : X \to S$ be a projective morphism with X of dimension n. Let k be the dimension of the generic fiber. If f has a relative Chow-Künneth decomposition given by relative projectors $p_j \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$, $0 \le j \le 2k$ then we have an isomorphism of relative Chow motives:*

$$ch(X/S) = (X, \Delta_X) \simeq \oplus_{j=0}^{2k}(X, p_j).$$

Definition 2.1.4. *Given $X, S \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$, X is said to be a quadric bundle over S if there exists a flat projective morphism $f : X \to S$, such that the fibers of f are quadrics of dimension $n - r$.*

Recall that a morphism $f : X \to S$, with $X, S \in \mathrm{Var}\,(k)$, is projective if we have a relative embedding $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$, with $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ a projective bundle. In the case where $f : X \to S$ is a quadric bundle with $\dim X = n$ and $\dim S = r$, we can choose such a projective bundle of dimension $n - r + 1$. Indeed, the existence of a relative ample divisor on X gives such an embbeding, for more details see [4, Prop. 1.2].

We refer to [28] for the elementary proprieties of quadrics.

Definition 2.1.5. *Let $\xi_i \subset X$ be a relative linear section of relative dimension i of a projective morphism $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$, with $X, S \in \mathrm{Var}\,(k)$. We define*

$$p_{2i} = \frac{1}{2}[\xi_i \times_S \xi_{n-r-i}] \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

The base of the quadric bundles admits a natural stratification

Proposition 2.1.6. *([74]) Let $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ be a quadric bundle, there is a stratification $\Delta_k \subset ... \subset \Delta_1 \subset S$ of S by closed subsets where*

$$\Delta_k = \{s \in S, rk(X_s) \leq n - r + 2 - k\}.$$

From now on $f : X \to S$ is a quadric bundle over a surface of odd relative dimension $2m - 1$. Consider the Stein factorization $F_m(X/S) \to \tilde{\Delta} \to \Delta$ where $F_m(X/S)$ denotes the relative Fano variety of m-dimensional linear subspaces and $\Delta = \Delta_1 \subset S$. It is a double covering ramified over $\Delta_2 \subset \Delta$.

We will denote $\Gamma \subset F_m(X/S) \times_S X$ the incidence correspondence with $p : \Gamma \to F_m(X/S)$, $q : \Gamma \to X$ the restriction to Γ of the two projections:

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & F_m(X/S) \\ X & \end{tikzcd}$$

The morphism $F_m(X/S) \to \tilde{\Delta}$ is flat projective, so we can take $W \subset F_m(X/S)$ be a multisection of $F_m(X/S) \to \tilde{\Delta}$. We denote $\Gamma_W \subset W \times_S X$ the restriction of Γ to W and $Z = q(\Gamma_W) \subset X$. We have $\dim(Z \times_\Delta Z) = n$ with $Z \times_\Delta Z = (Z \times_\Delta Z)^+ \cup (Z \times_\Delta Z)^-$ two n dimensional components:

$$(Z \times_\Delta Z)^+ = (q \times q)(p \times p)^{-1}(g \times g)^{-1}(\Delta_{\tilde{\Delta}}),\ (Z \times_\Delta Z)^- = (q \times q)(p \times p)^{-1}(g \times g)^{-1}(D^-)$$

where $g : W \to \tilde{\Delta}$ is the covering and D^- denotes the graph of the involution.

Definition 2.1.7. *Let $W \subset F_m(X/S)$ be a multisection of degree $2d$ and $Z = q(\Gamma_W) \subset X$. We define*

$$p_\infty = (-1)^m \frac{1}{d^2}([(Z \times_\Delta Z)^+] - [(Z \times_\Delta Z)^-]) \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

The main result of the paper is the following:

Theorem 2.1.8. *(=Theorem 2.4.2)*
Let $f : X \to S$ be a quadric bundle with fibers of odd dimension $2m - 1$, X smooth projective, S a smooth projective surface.

(1) The orthonormalization $(\{p_{2i}^N\}_{0 \leq i \leq 2m-1}, p_\infty^N)$ of the family $(\{p_{2i}\}_{0 \leq i \leq 2m-1}, p_\infty)$ constitutes a relative Chow-Künneth decomposition of $f : X \to S$.

(2) This relative Chow–Künneth decomposition induces an absolute Chow–Künneth decomposition of X and

$$\mathrm{ch}(X) \cong \oplus_{i=0}^{2m-1} \mathrm{ch}(S)(-i) \oplus \Pr(\tilde{C}/C)(-m).$$

Remark 2.1.9. *We show in addition that the absolute Chow–Künneth decomposition of X satisfies part of Murre's conjectures; see section 4.2.*

The proof is based on a generalization of the techniques of [56]. It consists of the following steps:

1. We show that the p_{2i} and p_∞ are relative projectors, for $0 \leq i \leq 2m - 1$.
2. Using the Gram–Schmidt process [76, lemma 4.11], we obtain mutually orthogonal relative projectors p_{2i}^N and p_∞^N for $0 \leq i \leq 2m - 1$.
3. We show that these relative projectors act in the right way on the perverse direct images.
4. We verify the identity $\Delta_X = \sum_{i=0}^{2m-1} p_{2i}^N + p_\infty^N \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$.
5. We pass to the corresponding absolute projectors and decompose them to obtain an absolute Chow-Künneth decomposition of X which satisfies Murre's conjectures I, II and III.

This article is organized as follows. In section 2 we prove steps 1, 2 and 3 (the proof that p_∞ is a relative projector uses the result from Appendix 5.1). By the Appendix 5.1, Γ_W induces an isomorphism of motives $\Gamma_W : (\tilde{C},\rho)\tilde{\to}(X,p_\infty)$. Section 3 is devoted to the proof of step 4. The idea of the proof is as follows. Let

$$R = \Delta_X - \sum_{i=0}^{2m-1} p_{2i}^N - p_\infty^N \in \mathrm{CH}_n(X\times_S X).$$

Consider the localization exact sequence

$$\mathrm{CH}_n(X_C\times_C X_C) \xrightarrow{(i\times i)_*} \mathrm{CH}_n(X\times_S X) \xrightarrow{(j\times j)^*} \mathrm{CH}_n(X_U\times_U X_U)\to 0,$$

where $C\subset S$ is the discriminant of $f: X\to S$ and $U = S\backslash C$. We first show that $R|_{X_U\times_U X_U} = 0$. Hence R is the image of an element $T\in \mathrm{CH}_n(X_C\times_C X_C)$. We then prove that R is nilpotent using a description of $\mathrm{CH}_n(X_C\times_C X_C)$. Hence $R=0$ since it is a projector. The description of $\mathrm{CH}_n(X_C\times_C X_C)$ represents the main technical difficulty of the paper ; in the case of conic bundles this step is easier since $\mathrm{CH}_3(X_C\times_C X_C)$ is generated by the irreducible components of $X_C\times_C X_C$.

Remark 2.1.10. *(i) For a quadric bundle $f: X\to C$ over a curve with odd–dimensional fibers (of dimension $2m-1$) the discriminant locus Σ is a finite set of points. In this case we have an analogous, but easier, result:*

$$\mathrm{ch}(X)\cong \oplus_{i=0}^{2m-1}\mathrm{ch}(S)(-i)\oplus \mathbb{Q}(-m)^{\#\Sigma}.$$

(ii) A similar result holds for quadric bundles $f: X\to S$ over a surface with even-dimensional fibers (say of dimension $2m$) . In this case one obtains a decomposition

$$\mathrm{ch}(X)\cong \oplus_{i=0}^{2m}\mathrm{ch}(S)(-i)\oplus M$$

where M is a Tate twist of the "Prym motive" of the double covering $\tilde{S}\to S$, ramified over the discriminant C. The proofs are similar to the ones presented in this paper.

Notation. All the Chow groups of algebraic varieties will be with rational coefficients. All the singular cohomology of complex varieties groups will be with rational coefficients.

Acknowledgments. The author was supported by research contract 2010-9201AAO047S00752 from the region of Burgundy. I would like to thank the referee for a number of comments that helped to improve the exposition of the paper, and my thesis advisoir J. Nagel for help and encouragement.

2.2 Relative Chow–Künneth decomposition I

Let $f: X\to S$ be a quadric bundle with odd-dimensional fibers of dimension $2m-1$, X and S smooth projective with $\dim(S)=2$. Then $\dim(X)=n=2m+1$. Assume $C=\Delta_1$ is smooth so that $\Delta_2=\emptyset$.

Consider the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}(E) \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Proposition 2.2.1. *The BBDG decomposition[10] of $Rf_*\mathbb{Q}$ is given by*

$$Rf_*\mathbb{Q} = \oplus_{j=0}^{2m-1}\mathbb{Q}_S[-2j]\oplus i_{C*}\mathcal{V}[-2m]\in \mathcal{D}_c^b(S),$$

where $\mathcal{V} = i^{-1}(R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v$ is the cokernel of the sheaf morphism $i^*: R^{2m}g_*\mathbb{Q}\to R^{2m}f_*\mathbb{Q}$ induced by the above diagram. The sheaf $\mathcal{V}$ is a local system of rank one on C.

Proof.

This follows from the perverse versions of the Lefschetz hyperplane theorem and the hard Lefschetz theorem ; cf.[55, Proposition 8.5.2]

□

To obtain a relative Chow-Künneth decomposition we need to define a family of mutually orthogonal relative projectors that induce the above decomposition and add up to the identity.

Let, for $0 \leq i \leq 2m-1$, $\xi_i \subset X$ be a relative linear section of relative dimension i of $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$.

Consider the relative correspondences $p_{2i} = \frac{1}{2}[\xi_i \times_S \xi_{2m-1-i}]$. An immediate computation shows that $p_{2i} = \frac{1}{2}[\xi_{2m-1-i}] \circ [\xi_i]^t$.

Proposition 2.2.2. *The relative correspondences p_{2i} are projectors and satisfy*

(i) $p_{2j} \circ p_{2i} = 0$ *if* $j > i$,

(ii) $p_{2j} \circ p_{2i} = 0$ *if* $j < i - 2$.

Proof.

We have the composition of relative correspondences

$$p_{2i} = \frac{1}{2}[\xi_{2m-1-i}][\xi_i]^t,$$

with $[\xi_i]^t \in \mathrm{CH}_{i+r}(X) = \mathrm{CH}_{i+r}(X \times_S S) = Cor_S(X, S)$
and $[\xi_{2m-1-i}] \in \mathrm{CH}_{n-i}(X) = \mathrm{CH}_{n-i}(S \times_S X) = \mathrm{Corr}_S(S, X)$.

Thus

$$p_{2j}p_{2i} = \frac{1}{4}[\xi_{2m-1-j}][\xi_j]^t[\xi_{2m-1-i}][\xi_i]^t.$$

We have $[\xi_j]^t[\xi_{2m-1-i}] \in \mathrm{CH}_{r+j-i}(S \times_S S) = \mathrm{CH}_{r+j-i}(S)$.
So $[\xi_j]^t[\xi_{2m-1-i}] = 0$ if $j > i$ or $j < i - r$. Moreover $[\xi_j]^t[\xi_{2m-1-i}] = 2[S]$ if $i = j$.

The result then follows by the associativity of the composition of relative correspondences.

□

Consider the Stein factorization $F_m(X/S) \to \tilde{C} \to C$, where $F_m(X/S)$ denotes the relative Fano variety of m–dimensional linear subspaces and $C = C_1 \subset S$. It is a non trivial étale double covering by the hypotheses of Theorem 2.1.8. Let $\tau : \tilde{C} \to \tilde{C}$ be the involution of the double covering.

Let $\Gamma \subset F_m(X/S) \times_S X$ be the incidence correspondence with $p : \Gamma \to F_m(X/S)$, $q : \Gamma \to X$ the restriction to Γ of the two projections.

For $W \subset F_m(X/S)$ a multisection of degree d of $F_m(X/S) \to \tilde{C}$ we denote $g : W \to \tilde{C}$ the covering of degree d, $\Gamma_W \subset W \times_S X$ the restriction of Γ to W and $Z = q(\Gamma_W) \subset X$.

We have

$$\tilde{C} \times_S \tilde{C} = D^+ \sqcup D^-,$$

where $D^+ = \Delta_{\tilde{C}}$ and $D^- = \tau^*$. We will denote $\rho = I - \tau_* \in \mathrm{Corr}_C(\tilde{C}, \tilde{C})$ the Prym projector and $(\tilde{C}, \rho)$ the corresponding Prym motive.

Remark 2.2.3. *If the covering $\tilde{C} \to C$ is trivial, then $\tilde{C}$ and W have two irreducible and connected components(the covering is non ramified) and $\tilde{C} \times_S \tilde{C}$ has four connected components D_1^+, D_2^+, D_1^-, D_2^-.*

The variety $Z \times_C Z \subset X \times_S X$ has two irreducible components $(Z \times_C Z)^{+,-} = (q \times q)(p \times p)^{-1}(g \times g)^{-1}(D^{+,-}) \subset X \times_S X$.

Denote

$$\gamma = \Gamma_W g^* \in \mathrm{Corr}_C(\tilde{C}, X).$$

We will denote:

$$q^+_{m,C} = \gamma \circ \gamma^t = [(Z \times_C Z)^+] \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X),$$

$$q^-_{m,C} = \gamma \circ \tau_* \circ \gamma^t = [(Z \times_C Z)^-] \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

We will consider

$$p_\infty = (-1)^m \frac{1}{d^2}\gamma \circ (I - \tau_*) \circ \gamma^t = (-1)^m \frac{1}{d^2}(q^+_{m,C} - q^-_{m,C}) \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

Note that by construction

$$^t p_\infty = p_\infty, \quad ^t p_{2i} = p_{4m-2-2i}. \tag{2.2.1}$$

Proposition 2.2.4. *(i) p_∞ is a relative projector,*

(ii) $p_{2i} \circ p_\infty = 0$ for $i \neq m-2$,

(iii) $p_\infty \circ p_{2i} = 0$ for $i \neq m+1$.

Proof.

Part (i) follows by the Appendix 2.5.2(1):

$$p_\infty p_\infty = (\frac{1}{d^2})^2 \gamma \circ (I - \tau_*) \circ \gamma^t \circ \gamma \circ (I - \tau_*) \circ \gamma^t = (-1)^m \frac{1}{d^2}\gamma \circ (I - \tau_*) \circ \gamma^t = p_\infty$$

since $\gamma^t \circ \gamma = (-1)^m (I - \tau_*) \in \mathrm{CH}_1(\tilde{C} \times_C \tilde{C})$.

For the proof of part (ii), note that $p_{2i} p_\infty = 0$ if $i \neq m-1$, $i \neq m-2$ for dimensional reasons. Specifically, $p_{2i} q^+_{m,C} = p_{2i} q^-_{m,C} = 0$ if $i \neq m-1$ and $i \neq m-2$, since

$$p_{2i} q^+_{m,C} = \frac{1}{2}[\xi_{2m-1-i}]([\xi_i]^t \gamma)\gamma^t$$

and $[\xi_i]^t \gamma \in \mathrm{CH}_{i-m+2}(\tilde{C} \times_S S) = \mathrm{CH}_{i-m+2}(\tilde{C})$.

For $i = m-1$, we have $[\xi_i]^t \gamma = \lambda[\tilde{C}]$ with $\lambda \in \mathbb{Z}$, hence $p_{2m-2} p_\infty = 0$ since $\tau^*[\tilde{C}] = [\tilde{C}]$.

Part (iii) follows from part (ii) by transposition using (2.2.1).

□

We now use the Gram–Schmidt orthonormalization process:

Lemma 2.2.5. *[78, Lemma 2.12]*

Let V be a $\mathbb{Q}$-algebra and k a positive integer. Let $p_0, \ldots, p_n$ be idempotents of V which satisfy $p_j p_i = 0$ for $j > i$. Then

$$\tilde{p_i} = (1 - \frac{1}{2}p_0)\ldots(1 - \frac{1}{2}p_{i-1})p_i(1 - \frac{1}{2}p_{i+1})\ldots(1 - \frac{1}{2}p_n)$$

define idempotents so that $\tilde{p_j}\tilde{p_i} = 0$ for $j > i$ and $j = i-1$. Moreover, if we apply this process r times, we will obtain idempotents p_i^r which satisfy $p_j^r p_i^r = 0$ for $j > i$ and $j < i - r$.

Applying the Lemma two times to the family $\{p_{2i}\}_{0 \le i \le 2m-1}$, we obtain idempotents $\{\tilde{p}_{2i}\}_{0 \le i \le 2m-1}$ such that $\tilde{p}_{2i}\tilde{p}_{2j} = 0$ for $i \neq j$. These projectors satisfy again:

Proposition 2.2.6. *(i) $\tilde{p_{2i}} \circ p_\infty = 0$ for $i \neq m-2$.*

(ii) $p_\infty \circ \tilde{p_{2i}} = 0$ for $i \neq m+1$.

Proof.

Part (i) follows from Proposition 2.4 and by noting that $p_{2m-6} p_{2m-4} p_\infty = 0$ for dimensional reasons. More precisely, $p_{2m-6} p_{2m-4} q^+_{m,C} = p_{2m-6} p_{2m-4} q^-_{m,C} = 0$ since

$$p_{2m-6} p_{2m-4} q^+_{m,C} = \frac{1}{2}[\xi_{m+2}]([\xi_{m-3}]^t [\xi_{m+1}][\xi_{m-2}]^t \gamma)\gamma^t$$

and $[\xi_{m-3}]^t [\xi_{m+1}][\xi_{m-2}]^t \gamma \in \mathrm{CH}_{-1}(\tilde{C} \times_S S) = \mathrm{CH}_{-1}(\tilde{C}) = 0$.

Part (ii) follows from part (i) by transposition using (2.2.1).

□

Using Proposition 2.2.6, we can apply Lemma 2.2.5 to the family $(\{\tilde{p_{2i}}\}_{0\leq i\leq 2m-1}, p_\infty)$. Following this process we define:

— For $0 \leq i \leq 2m-1$, $i \neq m-2$, $i \neq m+1$: $p_{2i}^N = \tilde{p}_{2i} \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$.
— $p_\infty^N = p_\infty - \frac{1}{2}p_\infty\tilde{p}_{2m+2} - \frac{1}{2}\tilde{p}_{2m-4}p_\infty = p_\infty - \frac{1}{2}p_\infty p_{2m+2} - \frac{1}{2}p_{2m-4}p_\infty \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$.
— $p_{2m-4}^N = \tilde{p}_{2m-4} - \frac{1}{2}\tilde{p}_{2m-4}p_\infty = \tilde{p}_{2m-4} - \frac{1}{2}p_{2m-4}p_\infty \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$.
— $p_{2m+2}^N = \tilde{p}_{2m+2} - \frac{1}{2}p_\infty\tilde{p}_{2m+2} = \tilde{p}_{2m+2} - \frac{1}{2}p_\infty p_{2m+2} \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$.

The relative correspondences p_{2i}^N, $0 \leq i \leq 2m-1$, and p_∞^N constitute then an orthogonal family of idempotents.

We now look at the action of these projectors on the higher direct images.

Proposition 2.2.7. *(i) For $0 \leq i \leq 2m-1$ and $0 \leq j \leq 2m-1$, $j \neq m$, we have $p_{2i*}R^{2j}f_*\mathbb{Q} = \delta_{i,j}R^{2j}f_*\mathbb{Q}$.*

(ii) For $j = m$, we have $p_{2i*}i^*R^{2m}g_*\mathbb{Q} = \delta_{i,m}i^*R^{2m}g_*\mathbb{Q}$.

(iii) We have $p_{\infty*}((R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v) = I_{(R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v}$.

Proof.

As, for $j \neq m$, $R^{2j}f_*\mathbb{Q} = i^*R^{2j}g_*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_S$ is the constant sheaf on S, it is enough to show that $p_{2i,*}(R^{2j}f_*\mathbb{Q})_{|U}) = \delta_{i,j}I_{(R^{2j}f_*\mathbb{Q})_{|U}}$ with $U = S\backslash C$ the open subset of S over which f is smooth. We see this immediately by the action on the smooth fibers. This proves (i).

The same technique proves (ii).

For (iii), let $V \subset S$ be an open subset(with $V \cap C \neq \emptyset$) and $\alpha \in \Gamma(V, (R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v)$. By the Appendix 2.5.2(2), γ_* induces an isomorphism of sheaves on S

$$\gamma_* : (\pi_*\mathbb{Q})^- \tilde{\to} (R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v$$

So let $\beta \in \Gamma(V, (\pi_*\mathbb{Q})^-)$ such that $\alpha = \gamma_*\beta$. We have then by the Appendix 2.5.2(1)

$$q_{m,C,*}^+\alpha = \gamma\gamma_*^t\gamma_*\beta = \gamma_*d^2(I - \tau_*)\beta = \gamma d^2(2\beta) = 2d^2\alpha.$$

We have in the same way

$$q_{m,C,*}^- = \gamma_*\tau_*d^2(I - \tau_*)\beta = \gamma_*d^2(I - \tau_*)\beta = \gamma_*d^2(-2\beta) = -2d^2\alpha.$$

□

Proposition 2.2.8. *We have*

(i) $p_{\infty*}^N(R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v = I_{(R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v}$,

(ii) $p_{2i*}^N i^*R^{2j}g^*\mathbb{Q} = \delta_{i,j}i^*R^{2j}g_*\mathbb{Q}$,

(iii) $p_{2i*}^N(R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v = 0$,

(iv) $p_{\infty*}^N i^*R^{2j}g^*\mathbb{Q} = 0$.

Proof.

We have $p_\infty^N = p_\infty + \omega \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ with $\omega = -\frac{1}{2}p_\infty p_{2m+2} - \frac{1}{2}p_{2m-4}p_\infty$. Since $p_{2m-4}p_\infty p_{2m+2} = 0$ for dimensional reasons and

$$p_{2m-4}p_\infty p_{2m-4} = p_{2m+2}p_\infty p_{2m+2} = 0$$

by Proposition 2.2.4, we obtain $\omega^2 = 0$. Hence, $\omega_*(R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v = 0$ since it is a local system of rank one on C.

By Proposition 2.2.7, $\tilde{p_{2i}} = \delta_{ij}I_{i^*R^{2j}g_*\mathbb{Q}}$. Thus, for $0 \leq i \leq 2m-1$, $i \neq m-2$, $i \neq m+1$: $p_{2i,*}^N i^*R^{2j}g^*\mathbb{Q} = \delta_{i,j}i^*R^{2j}g^*\mathbb{Q}$.

For $i = m-2$, $p_{2m-4}^N = \tilde{p}_{2m-4} + \eta$ with $\eta = -\frac{1}{2}p_{2m-4}p_\infty$. Since p_∞ is supported on $X_C \times_C X_C$, η acts as zero on the invariant part, and the result follows.

Parts (iii) and (iv) follow from parts (i) and (ii) and the orthogonality of the projectors p_{2i}^N and p_∞^N.

□

2.3 Relative Chow–Künneth decomposition II

Let $f : X \to S$ be a quadric bundle of relative dimension $2m-1$, X and S smooth projective with $\dim(S) = 2$. Then $\dim(X) = n = 2m+1$. For $0 \leq i \leq 2m-1$, let $\xi_i \subset X$ be relative linear sections of $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ of relative dimension i.

The main theorem of this section is the following:

Theorem 2.3.1. *Let $R \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ be a relative correspondence. If R acts as zero on $Rf_*\mathbb{Q}$, then R is nilpotent, more precisely $R^9 = 0$.*

Denote $U = S \backslash C$ the open discriminant complement of S. Let $j' : U \hookrightarrow S$, $j : X_U \to X$, and $j \times j : X_U \times_U X_U \hookrightarrow X \times_S X$ be the open immersions.

Denote $\iota : C \hookrightarrow S$, $i : X_C \hookrightarrow X$ and $i \times i : X_C \times_C X_C \hookrightarrow X \times_S X$ the closed immersions.

We can describe the Chow group $\mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ via the localization exact sequence:

$$\mathrm{CH}_n(X_C \times_C X_C) \xrightarrow{(i\times i)_*} \mathrm{CH}_n(X \times_S X) \xrightarrow{(j\times j)^*} \mathrm{CH}_n(X_U \times_U X_U) \to 0.$$

Lemma 2.3.2. *Put $R_U = R_{|X_U \times_U X_U}$. Then $R_U^3 = 0$.*

Proof.

Denote $\xi_{i,U} = \xi_i \cap X_U \subset X$. They are relative linear sections of $f_U : X_U \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})_{|U} \to U$. Since $f_U : X_U \to U$ is a smooth quadric bundle of relative dimension $2m-1$, the map

$$\phi_U : \mathrm{CH}_2(U)^{\oplus 2m} \oplus \mathrm{CH}_1(U)^{\oplus 2m-1} \oplus \mathrm{CH}_0(U)^{\oplus 2m-2} \to \mathrm{CH}_n(X_U \times_U X_U),$$

induced by $[\xi_{i,U} \times_U \xi_{2m-1-i,U}]$, $[\xi_{i,U} \times_U \xi_{2m-i,U}]$ and $[\xi_{i,U} \times_U \xi_{2m+1-i,U}]$ is surjective by the Appendix, Proposition 2.5.6.

Since ϕ_U is surjective, there exist rational numbers n_i such that

$$R_U = R_{|X_U \times_U X_U} = \sum_{i=0}^{2m-1} n_i p_{2i,U} + \omega_U \in \mathrm{CH}_n(X_U \times_U X_U),$$

with $\omega_U \in K_U = \phi_U(\mathrm{CH}_1(U)^{\oplus 2m-1} \oplus \mathrm{CH}_0(U)^{\oplus 2m-1})$.

Let $V \subset U$ be a contractible open subset and for $0 \leq j \leq 2m-1$ take
$0 \neq \alpha \in \Gamma(V, R^{2j} f_*\mathbb{Q}) = H^{2j}(X_V, \mathbb{Q})$. We have then $R_{U,*}\alpha = \sum_{i=0}^{2m-1} n_i p_{2i,U,*}\alpha = n_j \alpha$ by Proposition 2.2.7. Thus $n_j \alpha = 0$. This gives $n_j = 0$ for $0 \leq j \leq 2m-1$. Hence $R_U = \omega_U \in \mathrm{CH}_n(X_U \times_U X_U)$. The Proposition 2.5.7 of the Appendix tells us then that $R_U^3 = 0$.

□

By the compatibility of relative correspondences with flat base change, we have $R^3_{|X_U \times_U X_U} = R_U^3 = 0$. The localization exact sequence then says that

$$R^3 = (i \times i)_* T \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X),$$

for some $T \in \mathrm{CH}_n(X_C \times_C X_C)$.

Recall that $f_C : X_C \to C$ admits a section e. Let $\tilde{X}$ be the blow up of X along $e(C)$ and let $\tilde{X_C}$ be the strict transform of X_C. The morphism $\tilde{X_C} \to C$ factors as $\tilde{X_C} \xrightarrow{h} X^H \xrightarrow{f^H} C$, where $h : \tilde{X_C} \to X^H$ is a $\mathbb{P}^1$ bundle and $f^H : X^H \to C$ is a smooth quadric bundle of relative dimension $2m-2$. Denote $\epsilon : \tilde{X_C} \to X_C$. Let $\xi^H_{j,C} \subset X^H$ be relative linear sections of f^H.

Lemma 2.3.3. *There exists $T^H \in \mathrm{CH}_{n-2}(X^H \times_C X^H)$ such that $T = (\epsilon \times \epsilon)_*(h \times h)^* T^H$.*

Proof.

Denote
$$X_C^o = X_C \backslash e(C)$$
and
$$(X_C \times_C X_C)^o = (X_C \times_C X_C) \backslash (X_C \times_C e(C) \cup e(C) \times_C X_C).$$
Let $p : X_C^o \to X^H$ be the relative projection from the section $e(C)$ on H_C and $p \times p : (X_C \times_C X_C)^o \to X^H \times_C X^H$. Denote $l : (X_C \times_C X_C)^o \hookrightarrow X_C \times_C X_C$ the open immersion.

Consider the commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}_{n-2}(X^H \times_C X^H) \arrow[r, "(p\times p)^*"] \arrow[d, "(h\times h)^*"] & \mathrm{CH}_n((X_C \times_C X_C)^o) \\ \mathrm{CH}_n(\tilde{X_C} \times_C \tilde{X_C}) \arrow[r, "(\epsilon\times\epsilon)_*"] & \mathrm{CH}_n(X_C \times_C X_C) \arrow[u, "l^*"] \end{tikzcd}.$$

Since $p \times p : (X \times_C X)^o \to X^H \times_C X^H$ is an $\mathbb{A}^2$ fibration, $(p \times p)^* : \mathrm{CH}_{n-2}(X^H \times_C X^H) \to \mathrm{CH}_n(X_C \times_C X_C)$ is an isomorphism.

Note that $l^* : \mathrm{CH}_n(X_C \times_C X_C) \to \mathrm{CH}_n((X_C \times_C X_C)^o)$ is an isomorphism because $\dim(X_C \times_C e(C) \cup e(C) \times_C X_C) = n - 1$.

Hence there exists $T^H \in \mathrm{CH}_{n-2}(X^H \times_C X^H)$ such that $T = (l^*)^{-1}(p \times p)^* T^H = (\epsilon \times \epsilon)_*(h \times h)^* T^H$.

□

Put $\lambda = i \circ \epsilon : \tilde{X_C} \to X$ and write $q_{2j,C} = (\lambda \times \lambda)_*(h \times h)^* p_{2j}(X^H) \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ Denote $pr : X \times_S X \to S$ the structural morphism.

Lemma 2.3.4. *Let $\xi_j \subset X$ be a linear section that extends the linear section $\xi_{j,C} = \epsilon(h^{-1}(\xi^H_{j,C}) \subset X_C$. We have*
$$q_{2j,C} = [\xi_{j+1} \times_S \xi_{2m-1-j}].pr^*[C] \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

Proof.

Since $\tilde{X_C} \to X^H$ is a $\mathbb{P}^1$-fibration we obtain $(\epsilon \times \epsilon)_*(h \times h)^*[\xi_{j,C} \times_C \xi_{2m-2-j,C}] = (i \times i)^*[\xi_{j+1} \times_S \xi_{2m-1-j}]$. The result then follows from the projection formula since $(i \times i)_*[X_C \times_C X_C] = pr^*[C]$.

□

Remark 2.3.5. *Note that*
$$(\lambda \times \lambda)_*(h \times h)^* p^+_{2m-2}(X^H) = \lambda_* h^* \Gamma^H_W g^* g_* (\Gamma^H_W)^t h_* \lambda^* = \gamma\gamma^t = q^+_{m,C}$$
and
$$(\lambda \times \lambda)_*(h \times h)^* p^-_{2m-2}(X^H) = \lambda_* h^* \Gamma^H_W g^* \tau_* g_* (\Gamma^H_W)^t h_* \lambda^* = \gamma\tau^*\gamma^t = q^-_{m,C}.$$

Lemma 2.3.6. *Let $K^H_C \subset \mathrm{CH}_{n-2}(X^H \times_C X^H)$ be the subspace 2.5.2 defined in the Appendix. Put $K_C = (\lambda \times \lambda)_*(h \times h)^* K^H_C$ and let $L = \sum_{j=0}^{2m-2} n_j q_{2j,C} + \omega \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ with $\omega \in K_C$. Then $L^3 = 0$.*

Proof.

It suffices to shows that, for $\omega \in K_C$ and $\eta \in K_C$,

a) $q_{2i,C} \circ q_{2j,C} q_{2k,C} = 0$,

b) $q_{2j,C} \circ \omega = \omega q_{2j,C} = 0$,

c) $\omega \circ \eta = 0$.

We start by proving a). By the Lemma 2.3.4, we have $q_{2j,C} = [\xi_{2m-1-j}] \circ [C] \circ [\xi_{j+1}]^t$. Hence,

$$q_{2i,C}q_{2j,C}q_{2k,C} = [\xi_{2m-1-i}][C][\xi_{i+1}]^t[\xi_{2m-1-j}][C][\xi_{j+1}]^t[\xi_{2m-1-k}][C][\xi_{k+1}]^t.$$

We claim that

$$[C][\xi_{i+1}]^t[\xi_{2m-1-j}][C][\xi_{j+1}]^t[\xi_{2m-1-k}][C] = 0. \tag{2.3.1}$$

To prove the claim, consider the expressions $[\xi_{i+1}]^t[\xi_{2m-1-j}] \in \mathrm{Corr}_S^p(S,S) = \mathrm{CH}^p(S)$ and $[\xi_{j+1}]^t[\xi_{2m-1-k}] \in \mathrm{Corr}_S^q(S,S) = \mathrm{CH}^q(S)$. If $p < 0$ or $q < 0$ the formula holds. If not then the expression (2.3.1) belongs to $\mathrm{CH}^{p+q+3}(S)$ and vanishes since $p+q \geq 0$.

The subspace $K_C \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ is generated by the elements

$$\begin{aligned}
q_{j,s'} &= (\lambda\times\lambda)_*(h\times h)^*(\rho\times\rho)_*([\xi^H_{j-1,s'} \times \xi^H_{2m-j,s'}]) \text{ for } 2 \leq j \leq 2m-1 \; j \neq m \; j \neq m+1\\
q_{m+1,s'} &= (\lambda\times\lambda)_*(h\times h)^*(\rho\times\rho)_*([\xi^H_{m,s'} \times \Lambda'^H_{s'}])\\
q_{m,s'} &= (\lambda\times\lambda)_*(h\times h)^*(\rho\times\rho)_*([\Lambda'^H_{s'} \times \xi^H_{m,s'}]).
\end{aligned}$$

where $s' \in C'$.

Note that $q_{j,s'} = q^t_{2m+1-j,s'}$ for $s' \in C'$ and $2 \leq j \leq 2m-1$.

We have

$$\begin{aligned}
q_{j,s'} &= \lambda_*h^*\rho_*[\xi^H_{2m-j,C'}][s'][\xi^H_{j-1}]^t\rho^*h_*\lambda^* \text{ for } 2 \leq j \leq 2m-1 \; j \neq m \; j \neq m+1\\
q_{m+1,s'} &= \lambda_*h^*\rho_*[\Lambda'^H][s'][\xi^H_{m,C'}]^t\rho^*h_*\lambda^*\\
q_{m,s'} &= \lambda_*h^*\rho_*[\xi^H_{m,C'}][s'][\Lambda'^H]^t\rho^*h_*\lambda^*.
\end{aligned}$$

For c), let us prove for instance that $q_{m,s'}q_{m,t'} = 0$, the other equalities are similar. We claim that

$$[s'][\xi^H_{m+1,C'}]^t\rho^*h_*\lambda^*\lambda_*h^*\rho_*[\Lambda'^H][t'] = 0. \tag{2.3.2}$$

Consider the expression $[\xi^H_{m+1,C'}]^t\rho^*h_*\lambda^*\lambda_*h^*\rho_*[\Lambda'^H] \in \mathrm{Corr}_S^p(C',C') = \mathrm{CH}^p(C' \times_C C')$. If $p < 0$ the formula holds. If not the expression 2.3.2 belongs to $\mathrm{CH}^{2+p}(C' \times_C C')$ and vanishes since $p \geq 0$.

Let us prove b). We have $q_{m,s'}q_{2j,C} = 0$ for $0 \leq j \leq 2m-2$. As before, it follows since $[s'][\Lambda'^H]^t\rho^*h_*\lambda^*[\xi_{2m-1-j}][C] = 0$. Indeed $[\Lambda'^H]^t\rho^*h_*\lambda^*[\xi_{2m-1-j}] \in \mathrm{Corr}_S^p(S,C') = \mathrm{CH}^p(C')$ vanishes if $p < 0$ and $[s'][\Lambda'^H]^t\rho^*h_*\lambda^*[\xi_{2m-1-j}][C] \in \mathrm{Corr}_S^{p+2}(S,C') = \mathrm{CH}^{p+2}(C')$. Similarly $q_{2j,C}q_{m,s'} = 0$ for $0 \leq j \leq 2m-2$ since $[C][\xi_{j+1}]^t\lambda_*h^*\rho_*[\xi^H_{m,C'}][s'] = 0$. Indeed $[\xi_{j+1}]^t\lambda_*h^*\rho_*[\xi^H_{m,C'}] \in \mathrm{Corr}_S^p(C',S) = \mathrm{CH}^{p-1}(C')$ vanishes if $p < 1$ and $[C][\xi_{j+1}]^t\lambda_*h^*\rho_*[\xi^H_{m,C'}][s'] \in \mathrm{Corr}_S^{p+2}(C',S) = \mathrm{CH}^{p+1}(C')$. By transposition we see that similarly $q_{m+1,s'}q_{2j,C} = q_{2j,C}q_{m+1,s'} = 0$ for $0 \leq j \leq 2m-2$. Similarly $q_{2j,C}q_{k,s'} = 0$ for $2 \leq k \leq 2m-1$, $k \neq m$, $k \neq m+1$ and $0 \leq j \leq 2m-2$ since $[C][\xi_{j+1}]^t\lambda_*h^*\rho_*[\xi^H_{2m-k,C'}][s'] = 0$. By transposition we see that similarly $q_{k,s'}q_{2j,C} = 0$ for $2 \leq k \leq 2m-1$, $k \neq m$, $k \neq m+1$ and $0 \leq j \leq 2m-2$.

□

Lemma 2.3.7. *We have $T^H = \sum_i n_i p_{2i}(X^H) + \omega^H$ with $\omega^H \in K^H_C$, where T^H is the cycle introduced in Lemma 2.3.3.*

Proof.

By Corollary 2.5.8 and Lemma 2.5.9 of the Appendix applied to the quadric bundle $f^H_C : X^H_C \to C$, there exist rational numbers n_j such that

$$T^H = \sum_{j=0, j\neq m-1}^{2m-2} n_j p_{2j}(X^H) + n^+p^+_{2m-2}(X^H) + n^-p^-_{2m-2}(X^H) + \omega^H \in \mathrm{CH}_{n-2}(X^H \times_C X^H),$$

with $\omega^H \in K^H_C$.

We obtain

$$R^3 = (\lambda \times \lambda)_*(h \times h)^* T^H = \sum_{j=1, j\neq m}^{2m-1} n_j q_{j,C} + n^+ q^+_{m,C} + n^- q^-_{m,C} + \omega \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X),$$

with $\omega \in K_C$.

Let $V \subset S$ be a contractible open subset of S such that $C \cap V \neq \emptyset$ and take $0 \neq \alpha \in H^0(V, (R^{2m} f_* \mathbb{Q})_v) = H^{2m}(X_V, \mathbb{Q})_v$. As $q_{j,C} \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ and $\omega \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ are nilpotent by the Lemma 2.3.6, $q_{j,C*}\alpha = 0$ and $\omega_*\alpha = 0$. Moreover the proof of Proposition 2.7(iii) shows that

$$R_*\alpha = (\sum_{j=1, j\neq m}^{2m-1} n_j q_{j,C} + n^+ q^+_{m,C} + n^- q^-_{m,C} + \omega)_*\alpha = 2d^2(n^+ - n^-)\alpha.$$

As $\alpha \neq 0$, we obtain $n^+ = n^- = n$.

Hence,

$$T^H = \sum_{j=0, j\neq m-1}^{2m-1} n_j p_{2j}(X^H) + n(p_{2m-2}(X^H)^+ + p^-_{2m-2}) + \omega^H \in \mathrm{CH}_n(X^H \times_C X^H).$$

Note that $p^+_{2m-2}(X^H) + p^-_{2m-2}(X^H) = d^2 p_{2m-2}(X^H) + \omega_2^H$, with $\omega_2^H \in K_C^H$ by Lemma 2.5.10.
We obtain finally:

$$\begin{aligned} T^H &= \sum_{j=0, j\neq m-1}^{2m-2} n_j p_{2j}(X^H) + n(d^2 p_{2m-2}(X^H) + \omega_2^H) + \omega^H \\ &= \sum_{j=0}^{2m-2} n_j p_{2j}(X^H) + \omega_3^H \in \mathrm{CH}_n(X^H \times_C X^H), \end{aligned}$$

with $n_m = nd^2$ and $\omega_3^H = \omega^H + n\omega_2^H \in K_C^H$.

□

We can now prove Theorem 2.3.1.

Proof. (Theorem 2.3.1)
We have by Lemma 2.3.7

$$R^3 = \sum_{j=0}^{2m-2} n_j q_{2j,C} + \omega_3 \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X), \tag{2.3.3}$$

with $\omega_3 \in K_C$. Lemma 2.3.6 then shows that $R^9 = (R^3)^3 = 0$. This completes the proof of Theorem 2.3.1.

□

Proposition 2.3.8. *1. The mutually orthogonal projectors $p^N_{2i} \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$, $0 \leq i \leq 2m-1$, and $p^N_\infty \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ constitute a relative Chow–Künneth decomposition of $f : X \to S$.*

2. We have the following isomorphisms of relative Chow motives:

(1) $(S, \Delta_S)(i) \tilde{\to} (X, p_{2i}) \tilde{\to} (X, p^N_{2i})$ for $0 \leq i \leq 2m-1$.

(2) $(\tilde{C}, \rho)(m) \tilde{\to} (X, p_\infty) \tilde{\to} (X, p^N_\infty)$.

Proof.
For the proof of part one we consider now

$$R = \Delta_X - \sum_{i=0}^{2m-1} p^N_{2i} - p^N_\infty \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

As R acts by zero on $Rf_*\mathbb{Q}$ by Proposition 2.2.8, Theorem 2.3.1 tells us that $R^9 = 0$.
As R is an idempotent, $R = R^2 = R^9$, we conclude that $R = 0$, i.e.

$$\Delta_X = \sum_{i=0}^{2m-1} p_{2i}^N + p_\infty^N \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

Let us prove part two. The first isomorphism of (1) is induced by $[\xi_i] \in \mathrm{Corr}_S^{2m-1-i}(S, X)$ and $[\xi_{2m-1-i}]^t \in \mathrm{Corr}_S^{-(2m-1-i)}(S, X)$ is the inverse. The second isomorphism of (1) is induced by $p_{2i}p_{2i}^N \in \mathrm{Corr}_S^0(X, X)$ and $p_{2i}^N p_{2i} \in \mathrm{Corr}_S^0(X, X)$ is the inverse (note that $p_{2i}^N - p_{2i}$ is nilpotent of order 2). The first isomorphism of (2) is induced by $\gamma \in \mathrm{Corr}_S^m(\tilde{C}, X)$ and $\gamma^t \in \mathrm{Corr}_S^{-m}(X, \tilde{C})$ is the inverse. The second isomorphism of (2) is induced by $p_\infty p_\infty^N \in \mathrm{Corr}_S^0(X, X)$ and $p_\infty^N p_\infty \in \mathrm{Corr}_S^0(X, X)$ is the inverse (note that $p_\infty^N - p_\infty$ is nilpotent of order 2).

□

Combining parts 1 and 2 of Proposition 2.3.8 we obtain the following:

Corollary 2.3.9. *We have an isomorphism of relative Chow motives:*

$$(X, \Delta_X) \tilde{\to} \oplus_{i=0}^{2m-1} (S, \Delta_S)(-i) \oplus (\tilde{C}, \rho)(-m).$$

2.4 Consequences

2.4.1 Absolute Chow–Künneth decomposition

Definition 2.4.1. *([51, sec. 4.2.3], [55, def. 6.1.1])*
Let X be a smooth, projective variety over k of dimension n. We say that X has a Chow–Künneth decomposition if there exist $p_j \in \mathrm{CH}_n(X \times X)$ for $0 \le j \le 2n$, such that:

1. *the composition of the correspondences p_j and p_k equals to $\delta_{j,k}p_j$: $p_j p_k = \delta_{j,k}p_j$, i.e. p_j are mutually orthogonal projectors,*
2. *$\sum_{j=0}^{2n} p_j = \Delta_X \in \mathrm{CH}_n(X \times X)$, where Δ_X denotes the class of the diagonal $\Delta_X \subset X \times X$,*
3. *$[p_j]_{\mathrm{hom}} = [\Delta_X]^{2n-j,j}$, where $[\Delta_X]^{2n-j,j} \in F^n H^{2n}(X \times X, \mathbb{Q})$ denotes the j^{th} Künneth component of the cohomology class of the diagonal. Equivalently, the action of p_j on cohomology is $p_{j,*}\mid_{H^k(X)} = \delta_{j,k} I_{H^k(X)}$.*

Let $f : X \to S$ a quadric bundle with odd dimensional fibers $2m-1$, X, S smooth projective, $\dim(S) = 2$ and $C \subset S$ smooth.
Let for $0 \le i \le 2m-1$, $\xi_i \subset X$ be relative linear sections of $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$.
Denote $k : X \times_S X \hookrightarrow X \times X$ the closed embedding.
$k_* : \mathrm{CH}_n(X \times_S X) \to \mathrm{CH}_n(X \times X)$ gives the functor from relative to absolute correspondences [55].
S being a smooth projective surface, it admits a Chow–Künneth decomposition given by projectors $p_j(S) \in \mathrm{CH}_2(S \times S)$ for $0 \le j \le 4$ which satisfy Murre's conjectures [55].
Let π_{2i} be the image under this functor of the projector $p_{2i}^N(X/S)$ and let π_∞ be the image of p_∞^N. By Proposition 2.3.8 (2) and Murre's result, we have $(X, \pi_{2i}) \simeq (S, \Delta_S)(-i) \simeq \oplus \sum_{j=0}^4 (S, p_j(S))(-i)$. This implies that we have on orthogonal decomposition $\pi_{2i} = \sum_{j=0}^4 \pi_{2i,j} \in \mathrm{CH}_n(X \times X)$, where $\pi_{2i,j}$ is the image of $p_j(S)$ under this isomorphism. Put

$$p_k(X) = \begin{cases} \sum_{2i+j=k} \pi_{2i,j} & k \neq 2m+1 \\ \sum_{2i+j=k} \pi_{2i,j} + \pi_\infty & k = 2m+1. \end{cases}$$

Theorem 2.4.2. *Suppose that the discrimiantn curve C is smooth and the double covering $\tilde{C} \to C$ is non trivial. Then the projectors $p_k(X)$ induce an absolute Chow–Künneth decomposition of X and*

$$\mathrm{ch}(X) \cong \oplus_{i=0}^{2m-1} \mathrm{ch}(S)(-i) \oplus \mathrm{Pr}(\tilde{C}/C)(-m) \tag{2.4.1}$$

where $\mathrm{Pr}(\tilde{C}/C = \tilde{C}, \rho)(-m)$ is the Prym motive associated to the double covering $\tilde{C} \to C$.

Proof. By construction the projectors $p_k(X)$ are mutually orthogonal and add up to the diagonal Δ_X. To show that it gives an absolute decomposition we have to show that the action of $p_k(X)$ on $H^l(X)$ is zero for $k \neq l$. Since the action of $\pi_{2i,k-2i}$ on $H^l(X)$ factors through the action of $p_{k-2i}(S)$ on $H^{l-2i}(S)$, the result is clear for $k \neq 2m+1$. For the remaining case put $M_\infty = (X, \pi_\infty)$ and note that if the double covering $\tilde{C} \to C$ is non-trivial, we have an isomorphism

$$H^i(M_\infty) \simeq H^{i-2m}(C, \mathbb{L}),$$

where $\mathbb{L} = (\pi_* \mathbb{Q})^-$ is a non-trivial rank one local system. The result then follows since $H^j(C, \mathbb{L}) = 0$ for $j \neq 1$. The formula (2.4.1) follows from Corollary 2.3.9. □

Remark 2.4.3. *(i) If the double covering $\tilde{C} \to C$ is trivial, then the motive (X, π_∞) is isomorphic to $(C, \Delta_C)(-m)$ and we have a decomposition $(X, \Delta_X) \tilde{\to} \oplus_{i=0}^{2m-1} (S, \Delta_S)(-i) \oplus (C, \Delta)(-m)$.*

(ii) If the discriminant curve C is not smooth, one should replace C by its normalization N and the double covering $\tilde{C} \to C$ by $\tilde{N} \to N$ as in [56].

Corollary 2.4.4. *If the double covering $\tilde{C} \to C$ is non-trivial, we have the following isomorphisms of $\mathbb{Q}$ Hodge structures*

— $H^{2j}(X) \to H^0(S)(-j) \oplus H^2(S)(j-1) \oplus H^4(S)(j-2)$,
— $H^{2j+1}(X) \tilde{\to} H^1(S)(-j) \oplus H^3(S)(j-1)$ *if* $j \neq m$,
— $H^n(X) \tilde{\to} H^1(S)(-m-1) \oplus H^3(S)(-m) \oplus H^1(\tilde{C})^-$,

and the following isomorphisms of Chow groups with rational coefficients

— $\mathrm{CH}^0(S) \oplus \mathrm{CH}^1(S)(\oplus \mathrm{CH}^2(S)(-j+2) \tilde{\to} \mathrm{CH}^j(X)$ *if* $j \neq m+1$,
— $\mathrm{CH}^0(S) \oplus \mathrm{CH}^1(S) \oplus \mathrm{CH}^2(S) \oplus \mathrm{CH}^1(\tilde{C}) \tilde{\to} \mathrm{CH}^{m+1}(X)$,
— $\mathrm{CH}^1(S)_{\mathrm{alg}} \oplus \mathrm{CH}^2(S)_{\mathrm{alg}} \oplus \mathrm{CH}^1(\tilde{C})^- \tilde{\to} \mathrm{CH}^{m+1}(X)_{\mathrm{alg}}$.

Remark 2.4.5. *If $S = \mathbb{P}^2$, the previous result gives a motivic proof (with $\mathbb{Q}$-coefficients) of a theorem of Beauville [4].*

2.4.2 The conjectures of Beilinson and Murre

Let k be a field. Fix a Weil cohomology theory H^*.

Beilinson's conjectures. *Let X be a smooth, projective variety of dimension n over k. There exists a decreasing filtration F^ν ($\nu \leq 0$) on $\mathrm{CH}^l(X)$, $0 \leq l \leq n$, with the following properties.*

(i) $F^0 = \mathrm{CH}^l(X)$, $F^1 = \mathrm{CH}^l_{\mathrm{hom}}(X)$.
(ii) $F^r \cdot F^s \subset F^{r+s}$ *under the intersection product.*
(iii) F^* *is functorial for morphisms* $f : X \to Y$.
(iv) Assuming that the Künneth components $[\Delta_X]^{2n-j,j} \in F^n H^{2n}(X \times X, \mathbb{Q})$ of the cohomology class of the diagonal are algebraic, given by the class of $p_j \in Z^n(X \times X, \mathbb{Q})$, we require that $p_{j*} |_{Gr^\nu_{F^*} \mathrm{CH}^l(X)} = \delta_{j,2l-\nu} Id_{Gr^\nu_{F^*} \mathrm{CH}^l(X)}$.
(v) $F^m = 0$ *for* $m >> 0$ *(weak version) or,* $F^{l+1} = 0$ *(strong version).*

Murre's conjectures. *([51, sec. 4.3.2.1], [55, sec. 7.2])*

For X a smooth, projective variety over k of dimension n, Murre stated the following set of conjectures:

I (Existence) X admits a Chow–Künneth decomposition given by projectors p_j, for $0 \leq j \leq 2n$.

II For all $0 \leq l \leq n$, the projectors $p_0, \ldots, p_{l-1}$ and $p_{2l+1}, \ldots, p_{2n}$ act as zero on $\mathrm{CH}^l(X)$.

III For all $0 \leq l \leq n$, $\ker(p_{2l}) = \mathrm{CH}^l(X)_{\mathrm{hom}}$. (Note that clearly $\ker(p_{2l}) \subset \mathrm{CH}^l(X)_{\mathrm{hom}}$).

IV For all $0 \leq l \leq n$ the filtration on $\mathrm{CH}^l(X)$ defined by $F^p \mathrm{CH}^l(X) = \ker(p_{2l}) \cap \ker(p_{2l-1}) \cap \ldots \cap \ker(p_{2l-p+1})$, where the projectors p_j acts on $\mathrm{CH}^l(X)$, is independent of the choice of Chow–Künneth decomposition.

Jannsen proved [35, Thm. 5.2] that this set of conjectures is equivalent to the strong version of conjectures of Beilinson [51, sec. 4.3.2.2] and that if the conjectures are true, the filtrations agree.

Example 2.4.6. *1. Smooth projective curves satisfy Murre's conjectures.*

2. *For smooth projective surfaces, Murre has constructed a Chow–Künneth decomposition, via Picard and Albanese projectors which satisfy Murre's conjectures II and III ([53],[54]).*
3. *Smooth complete intersections in the projective space admit a Chow-Künneth decomposition.*
4. *If a smooth projective variety X of dimension n admits a Chow–Künneth decomposition given by projectors $p_0, \ldots, p_{2n}$, then $X \times X$ admits a Chow–Künneth decomposition, given by the projectors $q_r = \sum_{i+j=r} p_i \times p_j \in \mathrm{CH}^{2n}(X \times X \times X \times X)$, for $0 \leq r \leq 4n$.*
5. *Abelian varieties admit a Chow–Künneth decomposition ([70],[20]).*
6. *Uniruled 3-folds admit a Chow–Künneth decomposition ([1]) and also certain classes of 3-folds with a special condition on $H^2_{trans}(X)$ admit a Chow–Künneth decomposition ([2],[52]). The 3-folds and 4-folds whose maximal rationally connected quotient is of dimension at most 2 ([76]).*
7. *Elliptic modular varieties admit a Chow–Künneth decomposition ([26]).*

Proposition 2.4.7. *The projectors $p_k(X)$, $0 \leq k \leq 2n$ of X satisfy Murre's conjectures I, II and III.*

Proof. We have already verified conjecture I in Theorem 2.4.1. To prove conjecture II, we have to show that $p_k(X)$ acts as zero on $\mathrm{CH}^\ell(X)$ if $k \notin \{l, ..., 2\ell\}$. Let us first consider the case $k \neq 2m+1$. Write $p_k(X) = \sum_i \pi_{i,k-2i}$ where $\pi_{i,k-2i} = \xi_i^t \circ p_{k-2i}(S) \circ \xi_{2m-1-i}$. Since the action of $\pi_{i,k-2i}$ on $\mathrm{CH}^\ell(X)$ factors through the action of $p_{k-2i}(S)$ on $\mathrm{CH}^{\ell-i}(S)$, the action is zero if $k - 2i \notin \{l - i, ..., 2\ell - 2i\}$ by a theorem of Murre; cf. [55, 7.3.1]. Hence the action of $p_k(X)$ on $\mathrm{CH}^\ell(X)$ is zero if $k \notin \{l + i, ..., 2\ell\}$(which is stronger then the statement that we need). For $k = 2m + 1$ we write $p_{2m+1}(X) = \sum_i \pi_{i,2m+1-i} + \pi_\infty$. For the projectors $\pi_{i,2m+1-i}$ we use the same reasoning as above, and the projector π_∞ only acts on $\mathrm{CH}_{m+1}(X)$ since the Prym projector ρ only acts on $\mathrm{CH}^1(\tilde{C})$ if the double covering is non trivial. If the double covering is trivial, we decompose the motive π_∞ as in Remark 2.4.3. To prove conjecture III, we have to show that if $Z \in \mathrm{CH}^\ell_{\mathrm{hom}}(X)$ is homologically trivial, then Z belongs to the kernel of $p_{2\ell}(X)$. To this end, write $p_{2\ell}(X) = \sum_i \pi_{i,2\ell-2i}$ as before. We obtain

$$p_{2\ell}(Z) = \sum_i (\xi_i)^t_*(p_{2\ell-2i}(S)(\xi_{2m-1-i})_*(Z))$$

Now if Z is homologically trivial then for all i the cycle $(\xi_{2m-1-i})_*(Z) \in \mathrm{CH}^{\ell-i}(S)$ is homologically trivial. Hence it belongs to the kernel of $p_{2\ell-2i}(S)$ by the results of Murre [loc.cit.]. This shows that Z belongs to the kernel of $p_{2\ell}(X)$.

Proof.

Remark 2.4.8. *As the motive of X is a direct sum of a number of Tate twists of copies of the motive of the surface S and a direct summand of the motive of a curve, the motive (X, Δ_X) is finite dimensional if the motive of S is finite dimensional.*

2.5 Appendix

2.5.1 Computation of $\gamma^t \circ \gamma$

Let $f : X \to S$ be a quadric bundle over a smooth projective surface S, with fibers of dimension $2m - 1$. Let $W \subset F_m(X/S)$ a multisection of degree d of $F_m(X/S) \to \tilde{C}$. Denote $i : C \hookrightarrow S$ the closed immersion and $\pi : \tilde{C} \to S$ the double covering $\tilde{C} \to C$ composed with the immersion i. Recall that

$$\gamma = \Gamma_W g^* \in \mathrm{Corr}_C(\tilde{C}, X).$$

The aim of this section is to compute $\gamma^t \circ \gamma \in \mathrm{Corr}^0_C(\tilde{C}, \tilde{C}) = \mathrm{CH}_1(\tilde{C} \times_C \tilde{C})$.

Note that

$$\mathrm{CH}_1(\tilde{C} \times_C \tilde{C}) \cong H_2^{BM}(\tilde{C} \times_C \tilde{C}) \cong \mathrm{End}(\pi_*\mathbb{Q}),$$

hence it suffices to study the action of $\gamma^t \circ \gamma$ on $\pi_*\mathbb{Q}$. To do this we choose a point $s \in C$ and a transversal slice T to C at s. Denote $X_T = f^{-1}(T)$ and let $\overline{X_T}$ be a smooth compactification of X_T such that $f_T : X_T \to T$ extends to $\overline{f} : \overline{X_T} \to \overline{T}$.

Restricting to T we obtain

$$(\pi_*\mathbb{Q})_s \overset{\gamma_T}{\to} R^{2m}f_{T*}\mathbb{Q} \overset{\gamma_T^t}{\to} (\pi_*\mathbb{Q})_s.$$

Denote $\pi^{-1}(s) = \{s', s''\}$. Since $(\pi_*\mathbb{Q})_s = \mathbb{Q}[s'] \oplus \mathbb{Q}[s'']$, the above map is given by a 2 by 2 matrix A with rational coefficients.

Proposition 2.5.1. *We have*

$$A = (-1)^m d^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proof.
Given $t, u \in \{s', s''\}$, write $g^{-1}(t) = \{t_1, \ldots, t_d\}$ and write $g^{-1}(u) = \{u_1, \ldots, u_d\}$. The (t,u)-component of $(\gamma^t \circ \gamma)_T$ is given by the composition

$$H^0(\{t\}) \to \oplus_{i=1}^d H^0(\Lambda_{t_i}) \to H_c^{2m}(X_T) \to H^{2m}(X_T) \to \oplus_{j=1}^d H^{2m}(\Lambda_{u_j}) \to H^0(\{u\}).$$

The map $H_c^{2m}(X_T) \to H^{2m}(X_T)$ factors through $H^{2m}(\overline{X_T})$ and the map

$$H^0(\Lambda_{t_i}) \to H_c^{2m}(X_T) \to H^{2m}(X_T) \to H^{2m}(\Lambda_{u_j})$$

is given by the intersection $(\Lambda_{t_i} \cdot \Lambda_{u_j})$ in $\overline{X_T}$.

To calculate this intersection number, note that the singular quadric $X_s = f^{-1}(s)$ is a cone with vertex x over a smooth quadric X_s^H of dimension $2m-2$ and the two families of m-planes of X_s are obtained by taking the cone over the two families of $(m-1)$-planes of X_s^H. Also recall that if Λ_1 and Λ_2 belong to the same family of $m-1$ planes on X_s^H we have

$$\dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \equiv m - 1[\text{mod } 2].$$

Suppose that m is even. Then, if $t = u$, by moving Λ_{t_i} and Λ_{t_j} in their rational equivalence class, we may assume that the intersection is the vertex x. Hence $\Lambda_{t_i} \cdot \Lambda_{t_j} = 1$. If $u = \tau(t)$, we compute the intersection $\Lambda_{t_i} \cdot \Lambda_{u_j}$ as follows. Since $\Lambda_{t_i} + \Lambda_{u_j}$ is rationally equivalent in $\overline{X_T}$ to the intersection of X_s with a relative linear subspace and any two fibers are numerically equivalent we obtain $\Lambda_{t_i} \cdot (\Lambda_{t_i} + \Lambda_{u_j}) = 0$. Hence $\Lambda_{t_i} \cdot \Lambda_{u_j} = -1$. The proof for m odd is similar.

□

Corollary 2.5.2. *We have*

(1) $\gamma^t \circ \gamma = (-1)^m d^2 (I - \tau_*) \in \mathrm{CH}_1(\tilde{C} \times_C \tilde{C})$ *and*

(2) γ *induces an isomorphism* $\gamma_*(\pi_*\mathbb{Q})^- \tilde{\to} (R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v$.

Proof. Part one is the expression of the matrix A. Part two follows from the fact that the composite morphism of sheaves $(\pi_*\mathbb{Q})^- \overset{\gamma_*}{\to} (R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v \overset{\gamma_*^t}{\to} (\pi_*\mathbb{Q})^-$ on S is an isomorphism. Indeed, if $s \in C$, then $\pi^{-1}(s) = \{s', s''\}$ and this morphism sends $[s'] - [s''] \in H^0(\pi^{-1}(s))$ to $2(-1)^m d^2([s'] - [s'']) \in H^0(\pi^{-1}(s))$ by the computation of the matrix A. Hence, $\gamma_*(\pi_*\mathbb{Q})^- \to (R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v$ is injective. Since $(R^{2m}f_*\mathbb{Q})_v$ is a local system of rank one on C, the same as $(\pi_*\mathbb{Q})^-$, it is an isomorphism. □

2.5.2 Chow groups of smooth quadric bundles

Definition 2.5.3. *Let X and S be smooth irreducible algebraic varieties and $f : X \to S$ a smooth morphism. We say that $f : X \to S$ admits a relative cellular decomposition in the weak sense if there exists a stratification by closed subvarieties $X_\alpha \subset X_{\alpha+1} \subset \ldots \subset X$ so that*

$$f_\alpha = f_{|X_\alpha \backslash X_{\alpha-1}} : X_\alpha \backslash X_{\alpha-1} = X_{\alpha,1} \sqcup \ldots \sqcup X_{\alpha,l} \to S$$

where $X_{\alpha,1} \to S, \ldots, X_{\alpha,l} \to S$ are $\mathbb{A}^k$ fibrations in the weak sense (not necessarily locally trivial).

Proposition 2.5.4. *If $f : X \to S$ admits a relative cellular decomposition $X = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_\alpha \supset \ldots$, with* $\operatorname{codim}(X, X_\alpha) = c_\alpha$*, then we have:*

(i) $\oplus_\alpha \operatorname{CH}^{k-c_\alpha}(S) \tilde{\to} \operatorname{CH}^k(X)$,

(ii) $\oplus_{\alpha,\beta} \operatorname{CH}^{k-c_\alpha-c_\beta}(S) \tilde{\to} \operatorname{CH}^k(X \times_S X)$.

Proof. Part (i) has been proved by Köck [39] in the case when $X_{\alpha,i} \to S$ are locally trivial fibrations. The result also holds for fibrations in the weak sense by [15].

Part (ii) follows in the same way since $X \times_S X \to S$ admits a relative cellular decomposition (see [37]). □

Proposition 2.5.5. *Let $f : X \to S$ be a smooth quadric bundle. There exists a finite covering $\pi : S' \to S$ so that the quadric bundle $f' : X' = X \times_S S' \to S'$ admits a relative cellular decomposition.*

Proof. Recall that in the case of a quadric Q defined over $\mathbb{C}$ the cellular decomposition is obtained as follows. Chose a point $p \in Q$ and consider the intersection $Q \cap T_pQ$, which is a cone over a smooth quadric Q' of dimension $dim(Q) - 2$. By induction (starting with the case $\mathbb{P}^1$ and $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$), Q' admits a cellular decomposition. Hence Q admits a cellular decomposition.

We can apply the same process in the relative case, if all the data needed to produce the cellular decomposition are defined over the base (if there exists a section of $F_i(X/S) \to S$ for $i \leq \dim(X/S)/2$). This can be achieved by passing to a finite covering of the base. □

Proposition 2.5.6. *Let $f : X \to S$ be a quadric bundle which is smooth of relative dimension $2m - 1$. Assume for simplicity that S is a surface. Let $\xi_i \subset X$ be a relative linear section. We have a surjection of $\mathbb{Q}$ vector spaces*

$$\phi : \operatorname{CH}_2(S)^{\oplus 2m} \oplus CH_1(S)^{\oplus 2m-1} \oplus \operatorname{CH}_0(S)^{\oplus 2m-2} \to \operatorname{CH}_n(X \times_S X),$$

Proof. By Proposition 2.5.4, we can take a finite covering $\pi : S' \to S$ such that $f' : X' = X \times_S S' \to S'$ admits a relative cellular decomposition. Denote $\rho : X' \to X$ and $\rho : X \times_{S'} X' \to X \times_S X$ the finite coverings obtained by base change. Consider the relative linear sections $\xi'_i = \pi'^{-1}(\xi_i) \subset X'$. We have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{CH}_2(S')^{\oplus 2m} \oplus \operatorname{CH}_1(S')^{\oplus 2m-1} \oplus \operatorname{CH}_0(S')^{\oplus 2m-2} \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\phi'"] & \operatorname{CH}_2(S)^{\oplus 2m} \oplus \operatorname{CH}_1(S) \oplus \operatorname{CH}_0(S)^{\oplus 2m-r} \arrow[d, "\phi"] \\ \operatorname{CH}_n(X' \times_{S'} X') \arrow[r, "(\rho\times\rho)_*"] & \operatorname{CH}_n(X \times_S X) \end{tikzcd}$$

Indeed, since we took $\xi'_i = \pi'^{-1}(\xi_i)$, we have $[\xi'_i \times_{S'} \xi'_{2m+1-i-k}] = \rho^*[\xi_i \times_S \xi_{2m+1-i-k}]$. So by the projection formula, for $\alpha \in \operatorname{CH}_k(X)$ we have

$$[\xi_i \times_S \xi_{2m+1-i-k}]_*\alpha = (\rho \times \rho)_*([\xi'_i \times_{S'} \xi'_{2m+1-i-k}]_*\rho_*\alpha).$$

As $\pi : S' \to S$ and $\rho\times\rho : X' \times_{S'} X' \to X \times_S X$ are surjective (they are finite coverings), $\pi_* : \operatorname{CH}_{k'}(S) \to \operatorname{CH}_k(S)$ and $(\rho \times \rho)_* : \operatorname{CH}_n(X' \times_{S'} X') \to \operatorname{CH}_n(X \times_S X)$ are surjective. As the quadric bundle $f' : X' \to S'$ admits a relative cellular decomposition, (i) says that ϕ' is an isomorphism. Thus by a diagram chase, ϕ is surjective. □

We immediately deduce the following:

Proposition 2.5.7. *Let $f : X \to S$ be a quadric bundle which is smooth of relative dimension $2m - 1$. Assume for simplicity that S is a surface. Denote*

$$K_S = \phi(\operatorname{CH}_1(S)^{\oplus 2m-1} \oplus \operatorname{CH}_0(S)^{\oplus 2m-2}).$$

Let $F \in \operatorname{CH}_n(X \times_S X)$ be a relative correspondence of degree zero. If $F \in K_S$, then $F^3 = 0$.

Proof. Denote for $C \subset S$ an irreducible curve and for $1 \leq j \leq 2m-1$

$$q_{j,C} = [\xi_j \times_S \xi_{2m-j}]_*[C] = [\xi_j \times_S \xi_{2m-j}].pr^*[C] = [\xi_{j,C} \times_C \xi_{2m-j,C}] \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

We have $q_{j,C} = [\xi_{2m-j}] \circ [C] \circ [\xi_j]^t$. Let us show that $q_{i,C_1} q_{j,C_2} q_{k,C_3} = 0$. We have

$$q_{i,C_1} q_{j,C_2} q_{k,C_3} = [\xi_{2m-i}][C_1][\xi_i]^t[\xi_{2m-j}][C_2][\xi_j]^t[\xi_{2m-k}][C_3][\xi_k]^t.$$

We claim that

$$[C_1][\xi_{i+1}]^t[\xi_{2m-1-j}][C_2][\xi_{j+1}]^t[\xi_{2m-1-k}][C_3] = 0. \tag{2.5.1}$$

To prove the claim, consider the expressions $[\xi_{i+1}]^t[\xi_{2m-1-j}] \in \mathrm{Corr}^p_S(S,S) = \mathrm{CH}^p(S)$ and $[\xi_{j+1}]^t[\xi_{2m-1-k}] \in \mathrm{Corr}^q_S(S,S) = \mathrm{CH}^q(S)$. If $p < 0$ or $q < 0$, the formula holds. If not, then the expression (2.5.1) belongs to $\mathrm{CH}^{p+q+3}(S)$ and vanishes since $p+q \geq 0$.

Denote for $s \in S$ and $2 \leq j \leq 2m-1$

$$q_{j,s} = [\xi_j \times_S \xi_{2m+1-j}]_*[s] = [\xi_j \times_S \xi_{2m+1-j}].pr^*[s] = [\xi_{j,s} \times \xi_{2m+1-j,s}] \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X).$$

We have $q_{j,s} = [\xi_{2m+1-j}] \circ [s] \circ [\xi_j]^t$. Similarly, one shows that $q_{j,C} q_{k,s} = q_{k,s} q_{j,C} = 0$ and $q_{j,s} q_{k,t} = 0$ for $C \subset S$, $s \in S$ and $t \in S$. □

Let $f : X \to S$ be a smooth quadric bundle of relative dimension $2m-2$, X and S smooth quasi-projective, $\dim(X) = n$. Assume for simplicity that $S = C$ is a curve.

Let $\xi_i \subset X$ be relative linear sections of $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$.

Let $F_{m-1}(X/C) \to \tilde{C} \to C$ be the Stein factorization where $F_{m-1}(X/C)$ is the relative Fano variety of $(m-1)$-dimensional linear subspaces. Denote $\Gamma \subset F_{m-1}(X/C) \times_C X$ the incidence correspondence.

Let $W \subset F_{m-1}(X/S)$ be a smooth multisection of degree d of $F_{m-1}(X/S) \to \tilde{C}$ and $\Gamma_W \subset W \times_S X = p^{-1}(W)$ the restriction of Γ to W. We assume the double covering $\tilde{C} \to S$ non trivial so that $\tilde{C}$ and C are irreducible.

Denote $Z = q(\Gamma_W) \subset X$. Then $Z \times_C Z \subset X \times_C X$ has two irreducible components $Z \times_C Z = (Z \times_C Z)^+ \cup (Z \times_C Z)^- \subset X \times_C X$, obtained by considering the diagonal and the antidiagonal of $\tilde{C} \times_S \tilde{C}$.

By Proposition 2.5.5, there exists a finite covering $C' \to C$ so that the quadric bundle $f' : X' = X \times_C C' \to C'$ obtained by base change admits a relative cellular decomposition and in particular contains two relative $m-1$ planes Λ' and Λ''. Consider the relative linear sections $\xi'_i = \pi'^{-1}(\xi_i) \subset X'$. By Proposition 2.5.4, we have a surjection of $\mathbb{Q}$-vector spaces

$$\phi' : \mathrm{CH}_1(C')^{\oplus 2m+2} \oplus \mathrm{CH}_0(C')^{\oplus 2m} \to \mathrm{CH}_n(X' \times_{C'} X'),$$

Denote $\rho : X' \to X$ the finite covering obtained by base change. Since $\rho \times \rho : X' \times_{C'} X' \to X \times_C X$ is surjective, $(\rho \times \rho)_* : \mathrm{CH}_n(X' \times_{C'} X') \to \mathrm{CH}_n(X \times_C X)$ is surjective. We thus obtain the following corollary:

Corollary 2.5.8. *$\psi = (\rho \times \rho)_* \circ \phi' : \mathrm{CH}_1(C')^{\oplus 2m+2} \oplus \mathrm{CH}_0(C')^{\oplus 2m} \to \mathrm{CH}_n(X \times_C X)$ is surjective.*

We now look for generators. We clearly have for $\beta = (\beta_1, \ldots, c'_1, c'_2, c'_3, c'_4, \ldots, \beta_{2m-2}) \in \mathrm{CH}_0(C')$ and $c_i = \pi(c'_i) \in C$, $\psi(\beta) = ([\xi_{2m-2} \times_C \xi_1]_*(\pi_*(\beta_1)), \ldots, [\xi_{m,c_1} \times \Lambda'_{c_1}]$, $[\xi_{m,c_2} \times \Lambda''_{c_2}]$, $[\Lambda'_{c_3} \times \xi_{m,c_3}]$, $[\Lambda''_{c_4} \times \xi_{m,c_4}], \ldots, [\xi_1 \times_C \xi_{2m-2}]_*(\pi_*(\beta_{2m-2})))$. Denote

$$K_C = \psi(\mathrm{CH}_0(C')) \subset \mathrm{CH}_n(X \times_C X). \tag{2.5.2}$$

For $i \neq m-1$ and $\alpha_i \in \mathrm{CH}_1(C')$, we clearly have $\psi(\alpha_i) = [\xi_i \times_C \xi_{2m-2-i}]_*(\pi_*(\alpha_i))$.

Lemma 2.5.9. *Denote $p^+_{2m-2} = \Gamma_W g^* g_* \Gamma^t_W = [(Z \times_C Z)^+] \in \mathrm{CH}_n(X \times_C X)$ and $p^-_{2m-2} = \Gamma_W g^* g_* \Gamma^t_W = [(Z \times_C Z)^-] \in \mathrm{CH}_n(X \times_C X)$.*

Then

$$(\rho \times \rho)_*(\Lambda' \times_{C'} \Lambda') = p^+_{2m-2} + \omega_1, \tag{2.5.3}$$
$$(\rho \times \rho)_*(\Lambda'' \times_{C'} \Lambda'') = p^+_{2m-2} + \omega_2, \tag{2.5.4}$$
$$(\rho \times \rho)_*(\Lambda' \times_{C'} \Lambda'') = p^-_{2m-2} + \omega_3, \tag{2.5.5}$$
$$(\rho \times \rho)_*(\Lambda'' \times_{C'} \Lambda') = p^-_{2m-2} + \omega_4, \tag{2.5.6}$$

for some $\omega_i \in K_C$.

Proof. Let us prove the second equality. The others are similar. To this aim, we prove that $1/d(\rho\times\rho)^*[(Z\times_C Z)^+]-(\rho\times\rho)^*(\rho\times\rho)_*[\Lambda''\times_{C'}\Lambda'']=\omega_2'\in \mathrm{CH}_n(X'\times_{C'}X')$ with $\omega_2'\in K_{C'}=\phi'(\mathrm{CH}_0(C'))$.

Let $F=1/d\rho^*[(Z\times_C Z)^+]-\rho^*\rho_*[\Lambda''\times_{C'}\Lambda'']\in \mathrm{CH}_n(X'\times_{C'}X')$. We have by the relative cellular decomposition of $f':X'\to C'$(Proposition 2.5.5)

$$F=f_{1,1}[\Lambda'\times_{C'}\Lambda']+f_{2,2}[\Lambda''\times_{C'}\Lambda'']+f_{1,2}[\Lambda'\times_{C'}\Lambda'']$$

$$+f_{2,1}[\Lambda''\times_{C'}\Lambda']+J_f'+\omega_2'\in \mathrm{CH}_n(X_W\times_W X_W).$$

The generic fiber of the covering $\pi:C'\to C$ is of cardinality $2d$.

The action of $(\rho\times\rho)^*[(Z\times_C Z)^+]$ on $(R^{2m}f_*'\mathbb{Q})_s=H^{2m}(X_s,\mathbb{Q})$, for $s\in C'$ generic, is given by $[\Lambda_s']\to d^2[\Lambda_s']$ and $[\Lambda_s'']\to d^2[\Lambda_s'']$ if $[\Lambda_s']\cdot[\Lambda_s'']=0$ and $[\Lambda_s']\cdot[\Lambda_s']=1$. In this situation, we have $g_*\Gamma_W\Gamma_W g^*=d^2[D^+]\in \mathrm{CH}_1(\tilde{C}\times_C\tilde{C})$. This action is given by $[\Lambda_s']\to d^2[\Lambda_s'']$ and $[\Lambda_s'']\to d^2[\Lambda_s']$ if $[\Lambda_s']\cdot[\Lambda_s'']=1$ and $[\Lambda_s']\cdot[\Lambda_s']=0$. In this situation, we have $g_*\Gamma_W\Gamma_W g^*=d^2[D^-]\in \mathrm{CH}_1(\tilde{C}\times_C\tilde{C})$.

The action of $(\rho\times\rho)^*(\rho\times\rho)_*[\Lambda''\times_{C'}\Lambda'']$ on $(R^{2m}f_*'\mathbb{Q})_s=H^{2m}(X_s,\mathbb{Q})$, for $s\in C'$ generic, is given by $[\Lambda_s']\to d[\Lambda_s']$ and $[\Lambda_s'']\to d[\Lambda_s'']$ if $[\Lambda_s']\cdot[\Lambda_s'']=0$ and $[\Lambda_s']\cdot[\Lambda_s']=1$. This action is given by $[\Lambda_s']\to d[\Lambda_s'']$ and $[\Lambda_s'']\to d[\Lambda_s']$ if $[\Lambda_s']\cdot[\Lambda_s'']=1$ and $[\Lambda_s']\cdot[\Lambda_s']=0$. We have indeed $(\pi(\Lambda''))_s=\pi(\Lambda'')\cap X_s=\cup_{i=1}^d P_{i,s}'\cup\cup_{j=1}^d P_{j,s}''$ with $[P_{i,s}']=[\Lambda_s']$ and $[P_{i,s}'']=[\Lambda_s'']$, and $(\rho(\Lambda''\times_{C'}\Lambda'')_s=\rho(\Lambda''\times_{C'}\Lambda''))\cap X_s=\cup_{i=1}^d(P_{i,s}'\times P_{i,s}')\cup\cup_{j=1}^d(P_{j,s}''\times P_{j,s}'')$. Thus the action of F on $(R^{2m}f_*'\mathbb{Q})_s=H^{2m}(X_s,\mathbb{Q})$ vanishes for $s\in C'$ generic.

This gives $f_{1,1}=0$, $f_{2,2}=0$, $f_{1,2}=0$, $f_{2,1}=0$ and $J_f'=0$. Thus $F=\omega_2'\in \mathrm{CH}_n(X'\times_{C'}X')$.

Applying $(\rho\times\rho)_*$, we obtain: $[(Z\times_C Z)^+]-d(\rho\times\rho)_*[\Lambda''\times_{C'}\Lambda'']=(\rho\times\rho)_*\omega_2'=\omega_2\in \mathrm{CH}_n(X\times_S X)$. □

Hence we obtain:

Lemma 2.5.10. *Let $F\in \mathrm{CH}_n(X\times_C X)$ a relative correspondence that acts as zero on $Rf_*\mathbb{Q}$. Then $F\in K_C$.*

Proof. By Corollary 2.5.8 and Lemma 2.5.9, there exist rational numbers n_j, n^+, n^- such that $F=\sum_{i=0,i\neq m-1}^{2m-2}n_ip_{2i}+n^+p_{2m-2}^++n^-p_{2m-2}^-+\omega$ with $\omega\in K_C$. Since F acts as zero on $Rf_*\mathbb{Q}$, we obtain $n_i=n^+=n^-=0$. □

We finally note that, as in the odd-dimensional case, we have:

Remark 2.5.11. *Let $F\in \mathrm{CH}_n(X\times_C X)$ be a relative correspondence of degree zero. If $F\in K_C$, then $F^2=0$.*

Chapitre 3

Précisions et compléments

Dans ce chapitre, on donne quelques précisions et compléments sur le chapitre 3. Ici, $X, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ sont des variétés algébriques irréductibles (sauf mention contraire) sur $\mathbb{C}$.

On rappelle qu'un fibré en quadriques est une variété algébrique $X \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ munie d'un morphisme projectif plat $f : X \to S$ de variétés algébriques sur $\mathbb{C}$ de dimension relative r, de sorte qu'il existe un fibré projectif $g : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ de rang $r+1$ tel que $f = g \circ i$, où $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ est un plongement fermé, et tel que les fibres $X_s \subset \mathbb{P}^{r+1}$ sont des hypersurfaces quadriques.

• Formules de compositions de correspondances relatives

Soient $X \in \mathrm{Var}(k)$, $S \in \mathrm{SmVar}(k)$ et $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ un morphisme projectif surjectif. Soient $\xi_i \subset X$ des sections linéaires relatives et $T \subset S$ un fermé irréductible d'intersection non vide avec l'ouvert de platitude de f. Alors on a les compositions suivantes de correspondances relatives au-dessus de S (on peut composer car, d'une part S est lisse, donc la diagonale de S est localement intersection complète dans $S \times S$, et d'autre part f est propre) :

$$[\xi_j] \circ [\xi_i]^t = [\xi_i \times_S \xi_j] \in \mathrm{CH}(X \times_S X)$$

et

$$[\xi_j] \circ [T] \circ [\xi_i]^t = [\xi_{i,T} \times_T \xi_{j,T}] \in \mathrm{CH}(X \times_S X).$$

Ces formules sont en effet des cas particuliers de la proposition 1.3.13 En particulier, $p_{2j} := [\xi_i \times_S \xi_{d_X - d_S - i}] = [\xi_{d_X - d_S - i}] \circ [\xi_i]^t \in \mathrm{CH}_{d_X}(X \times_S X)$

• Preuve du (ii) de la proposition 2.2.8 : une petite remarque

Dans la preuve du (ii) de la proposition 2.2.8, le cas $i = m+1$ est similaire au cas $i = m-2$.

• Complément de l'appendice 2.5.2

Dans l'appendice 2.5.2 du chapitre précédent, on a utilisé le résultat suivant :

Proposition 3.0.12. *Soient $X, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ intègres et $f : X \to S$ un morphisme plat tel que $f^{-1}(s) \simeq \mathbb{A}^m_{\mathbb{C}}$ pour tout $s \in S$, i.e. f est une fibration au sens faible de fibre $\mathbb{A}^m_{\mathbb{C}}$. Alors $f^* : \mathrm{CH}^p(S) \to \mathrm{CH}^p(X)$ est un isomorphisme pour tout p.*

Ce résultat se démontre par récurrence sur la dimension de la base en utilisant la suite exacte de localisation pour les groupes de Chow. Dans cette section, on présente une démonstration directe des propositions 3.0.14 et 3.0.15 basée sur cette approche.

Proposition 3.0.13. *Soit $Q \subset \mathbb{P}^N_K$ une quadrique sur un corps K. Si, dans le cas $N = 2m$, la quadrique Q contient un $(m-1)$-plan Λ, ou si, dans le cas $N = 2m+1$, la quadrique Q contient un m-plan, alors Q admet une décomposition cellulaire.*

Démonstration.

Cela résulte d'une récurrence descendante sur la dimension des quadriques. Soit $p \in \Lambda$ un K-point et $T_pQ \subset \mathbb{P}^N_K$ l'espace tangent, qui est un hyperplan de $\mathbb{P}^N_K$. Soit $H \subset \mathbb{P}^N_K$ un hyperplan ne passant pas par p. Considérons une droite $L \subset \mathbb{P}^N_K$ passant par p et non contenue dans T_pQ. Cette droite L coupe Q en un autre K-point q : $L \cap Q = \{p, q\}$ Notons, par ailleurs, $t = L \cap H$. L'application bijective de projection depuis le point p, définie par

$$q = (< p, t > \cap Q) \backslash p \in Q \backslash (Q \cap T_pQ) \to t \in H \backslash (H \cap T_pQ)$$

sur les K-points, donne un isomorphisme de schémas

$$H \backslash (H \cap T_pQ)) = \mathbb{A}^{N-1}_K \tilde{\to} Q \backslash (Q \cap T_pQ)).$$

Ensuite, $Q \cap T_pQ$ est un cône de sommet p au-dessus d'une quadrique lisse Q' de dimension $N-3$. On a $\Lambda \subset T_pQ$, et Q' contient un $(m-2)$-plan si $N = 2m$ et un $(m-1)$-plan si $N = 2m+1$, à savoir $Q' \cap \Lambda \subset T_pQ$. □

Cas de dimension relative impaire

Proposition 3.0.14. *Soit $f : X \to S$ un fibré en quadriques lisses de dimension relative impaire $2m-1$, où $X, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ sont irréductibles. Par souci de simplification, on suppose que S est une surface. Ici, on ne suppose pas que X et S sont lisses. Soit $\xi_i \subset X$ une section linéaire relative. On a un homomorphisme surjectif*

$$\phi : \mathrm{CH}_2(S)^{\oplus 2m} \oplus \mathrm{CH}_1(S)^{\oplus 2m-1} \oplus \mathrm{CH}_0(S)^{\oplus 2m-2} \to \mathrm{CH}_n(X \times_S X),$$

.

Démonstration. Soient $\pi : S' \subset F_{m_1}(X/S) \to S$ une multisection de degré d et $f' : X' = X \times_S S' \to S'$ le fibré en quadriques obtenu par changement de base. Alors $\rho : X' = X \times_S S' \to X$ est un revêtement de degré d et $\rho \times \rho : X' \times_{S'} X' \to X \times_S X$ est un revêtement de degré d^2. Considérons $\xi'_i = \rho^{-1}(\xi_i) \subset X'$.

Si $\eta \in S'$ est un point générique de S' ou d'une courbe irréductible de S', alors la quadrique $X'_\eta \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})'|_\eta = \mathbb{P}^{2m}_{K(\eta)}$ contient un $(m-1)$-plan $\Lambda_{K(\eta)}$, donc d'après la proposition 3.0.13, admet une décomposition cellulaire. Donc, $X'_\eta \times X'_\eta$ admet une décomposition cellulaire.

Soit $\alpha \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$. Puisque $\rho \times \rho$ est surjectif, il existe $\alpha' \in \mathrm{CH}_n(X' \times_{S'} X')$ tel que $\alpha = (\rho \times \rho)_*(\alpha')$. Soit η le point générique de S'. Comme $X'_\eta \times X'_\eta$ admet une décomposition cellulaire, il existe une collection de nombres rationnels $\{n_i\}_{0 \leq i \leq 2m-1}$ tels que

$$\alpha'|_\eta = \sum_{i=0}^{2m-1} n_i [\xi'_{i,\eta} \times \xi'_{2m-1-i,\eta}] \in \mathrm{CH}_{n-2}(X'_\eta \times X'_\eta).$$

Il existe donc un ouvert $U' \subset S'$ tel que

$$\alpha'|_{U'} = \sum_{i=0}^{2m-1} n_i [\xi'_{i,U'} \times_{U'} \xi'_{2m-1-i,U'}] \in \mathrm{CH}_n(X'_{U'} \times_{U'} X'_{U'}).$$

La suite exacte de localisation avec $C' = S' \backslash U' = \cup C'_j$ et $i : X'_{C'} \times X_{C'} \hookrightarrow X' \times_{S'} X'$,

$$\mathrm{CH}_n(X'_{C'} \times_{C'} X'_{C'}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{CH}_n(X' \times_{S'} X') \to \mathrm{CH}_n(X'_{U'} \times_{U'} X'_{U'}) \to 0,$$

donne

$$\alpha' = \sum_{i=0}^{2m-1} n_i [\xi'_i \times_{S'} \xi'_{2m-1-i}] + i_*\beta \in \mathrm{CH}_n(X' \times X')$$

avec $\beta \in \mathrm{CH}_n(X'_{C'} \times_{C'} X'_{C'})$. Maintenant, on considère les points génériques $\eta_j \in C'_j$ des composantes irréductibles de C'. Les quadriques $X'_{\eta_j} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})'|_{\eta_j} = \mathbb{P}^{2m}_{K(\eta_j)}$ contiennent un $(m-1)$-plan, donc admettent une décomposition cellulaire. Donc $X'_{\eta_j} \times X'_{\eta_j}$ admet une décomposition cellulaire. On obtient ainsi la surjection par récurrence. □

Cas de dimension relative paire

Soit $f : X \to S$ un fibré en quadriques lisses de dimension relative $2m-2$, où $X, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ sont irréductibles. On suppose pour simplifier que $S = C$ est une courbe. Ici, on ne suppose pas que X et C sont lisses.

Pour chaque $i = 0, ..., 2m-2$, soit $\xi_i \subset X$ une section linéaire de $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$. De plus, soient $F_{m-1}(X/C) \to \tilde{C} \to C$ la factorisation de Stein de la variété de Fano relative $F_{m-1}(X/C) \to C$, et $C' \subset F_{m-1}(X/C)$ une multisection de degré $2d$ de $F_{m-1}(X/S) \to \tilde{C}$. On note $\pi : C' \subset F_{m-1}(X/C) \to C$ le revêtement de degré $2d$ et $f' : X' = X \times_C C' \to C'$ le fibré en quadriques obtenu par changement de base. Alors $\pi_X : X' = X \times_C C' \to X$ est un revêtement de degré $2d$ et $\rho \times \rho : X' \times_{C'} X' \to X \times_C X$ est un revêtement de degré $4d^2$. On considère $\xi'_i = \rho^{-1}(\xi_i) \subset X'$.

Proposition 3.0.15. *Soit $f : X \to S$ un fibré en quadriques lisses de dimension $2m-2$, où $X, S \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ sont irréductibles. Pour simplifier, on suppose que $S = C$ est une courbe. Ici, on ne suppose pas que X et C sont lisses. Avec les notations ci-dessus :*

- *Le fibré en quadriques $f : X' \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C'$ contient deux $(m-1)$-plans relatifs distincts $\Lambda' \subset X'$ et $\Lambda'' \subset X'$.*
- *On a un homomorphisme surjectif $\phi' : \mathrm{CH}_1(C')^{\oplus 2m+2} \oplus \mathrm{CH}_0(C')^{\oplus 2m} \to \mathrm{CH}_n(X' \times_{C'} X')$. Donc l'homomorphisme $\psi = (\rho \times \rho)_* \circ \phi' : \mathrm{CH}_1(C')^{\oplus 2m+2} \oplus \mathrm{CH}_0(C')^{\oplus 2m} \to \mathrm{CH}_n(X \times_C X)$ est surjectif.*

Démonstration. Le premier point est immédiat. On va en déduire le deuxième point. Si $\eta \in C'$ est le point générique de C', alors la quadrique $X'_\eta \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})'|_\eta = \mathbb{P}^{2m}_{K(\eta)}$ contient deux $(m-1)$-plans Λ'_η et Λ''_η, donc d'après la proposition 3.0.13, admet une décomposition cellulaire. Donc $X'_\eta \times X'_\eta$ admet une décomposition cellulaire.

Soit $\alpha \in \mathrm{CH}_n(X \times_C X)$. Puisque $\rho \times \rho$ est un revêtement, donc surjectif, il existe $\alpha' \in \mathrm{CH}_n(X' \times_{C'} X')$ tel que $\alpha = (\rho \times \rho)_*(\alpha')$. Soit η le point générique de C'. Comme $X'_\eta \times X'_\eta$ admet une décomposition cellulaire, il existe une collection de nombres rationnels $\{n_i\}_{0 \le i \le 2m-1}$ tels que

$$\alpha'|_\eta = \sum_{i=0, i\neq m-1}^{2m-2} n_i[\xi'_{i,\eta} \times \xi'_{2m-2-i,\eta}] + r_1[\Lambda'_\eta \times \Lambda'_\eta] + r_2[\Lambda'_\eta \times \Lambda''_\eta]$$

$$+ r_3[\Lambda''_\eta \times \Lambda'_\eta] + r_4[\Lambda''_\eta \times \Lambda''_\eta] \in \mathrm{CH}_{n-1}(X'_\eta \times X'_\eta).$$

Il existe donc un ouvert $U' \subset C'$ tel que

$$\alpha'|_{U'} = \sum_{i=0, i\neq m-1}^{2m-2} n_i[\xi'_{i,U'} \times_{U'} \xi'_{2m-1-i,U'}] + r_1[\Lambda'_{U'} \times_{U'} \Lambda'_{U'}] + r_2[\Lambda'_{U'} \times_{U'} \Lambda''_{U'}]$$

$$+ r_3[\Lambda''_{U'} \times_{U'} \Lambda'_{U'}] + r_4[\Lambda''_{U'} \times_{U'} \Lambda''_{U'}] \in \mathrm{CH}_n(X'_{U'} \times_{U'} X'_{U'}).$$

La suite exacte de localisation avec $C' \backslash U' = \{s_1, \ldots, s_l\}$ et $i : \sqcup_{1 \le j \le l} X'_{s_j} \times X'_{s_j} \hookrightarrow X' \times_{C'} X'$,

$$\oplus_{j=1}^l \mathrm{CH}_n(X'_{s_j} \times X'_{s_j}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{CH}_n(X' \times_{C'} X') \to \mathrm{CH}_n(X'_{U'} \times_{U'} X'_{U'}) \to 0,$$

donne

$$\alpha' = \sum_{i=0}^{2m-2} n_i[\xi'_i \times_{C'} \xi'_{2m-2-i}] + r_1[\Lambda' \times_{C'} \Lambda'] + r_2[\Lambda' \times_{C'} \Lambda'']$$

$$+ r_3[\Lambda'' \times_{C'} \Lambda'] + r_4[\Lambda'' \times_{C'} \Lambda''] + i_*\beta \in \mathrm{CH}_n(X' \times X')$$

avec $\beta \in \oplus_{j=1}^l \mathrm{CH}_n(X'_{s_j} \times X'_{s_j})$. $\square$

• **Complément de l'appendice 2.5.1**

Dans l'appendice 2.5.1, on a étudié l'action de

$$(\gamma^t \circ \gamma)_* : (\pi_* \mathbb{Q}) \to R^{2m} f_* \mathbb{Q} \to \pi_* \mathbb{Q}.$$

On procède de la manière suivante. Etant donné un point s sur la courbe discriminante C, il existe une courbe affine T qui coupe C transversalement en un unique point s. Si on restreint $\gamma^t \circ \gamma$ au-dessus de T, on obtient

$$(\gamma^t \circ \gamma)_{*|T} : (\pi_* \mathbb{Q})_s \to (R^{2m} f_* \mathbb{Q})_T \to (\pi_* \mathbb{Q})_s.$$

En prenant les sections globales on obtient :

$$\mathbb{Q}_{s'} \oplus \mathbb{Q}_{s''} \to H^0(T, R^{2m} f_* \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}_{s'} \oplus \mathbb{Q}_{s''},$$

où $\pi^{-1}(s) = \{s', s''\}$.

Puisque T est une une courbe affine, $H^j(T, R^k f_* \mathbb{Q}) = 0$ pour $j \geq 2$ par le théorème d'annulation d'Artin. De plus, $R^{2m-1} f_* \mathbb{Q} = 0$, car les quadriques n'ont pas de cohomologie en degré impair. La suite spectrale de Leray implique alors que

$$H^{2m}(X_T) \tilde{\to} H^0(T, R^{2m} f_* \mathbb{Q}).$$

Par construction, l'application γ_T se factorise par $H^{2m}_{X_s}(X_T)$ (cohomologie à support dans X_s). Par conséquent γ_T se factorise par $H^{2m}_c(X_T)$ et donc par $H^{2m}(\overline{X_T})$, où $\overline{X_T}$ est une compactification lisse de X_T telle que $f_T : X_T \to T$ s'étend en un morphisme $f_T : \overline{X_T} \to \overline{T}$. Ceci justifie le début de la Proposition 2.5.1.

• **Résultats de C. Vial sur les motifs de Chow absolus**

Théorème 3.0.16. *[77, Thm. 4.2] Soit k un corps et Ω/k un domaine universel. Soient $X, S \in \mathrm{PSmVar}(k)$ et $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat. Supposons qu'il existe un entier positif n tel que $\mathrm{CH}_l(X_s) = \mathbb{Q}$ pour tout $0 \leq l < n$ et pour tout point $s \in S(\Omega)$. Alors, il existe $Z \in \mathrm{PSmVar}(k)$ de dimension $d_X - 2n$ et un projecteur r sur Z tel que le motif de X admet une décomposition en somme directe dans $\mathcal{M}_{\mathrm{rat}}(k)$:*

$$(X, \Delta_X) \tilde{\to} \bigoplus_{i=0}^{d_X - d_S} (S, \Delta_S)(i) \oplus (Z, r, n).$$

Le théorème 3.0.16 est contenu dans la proposition suivante :

Proposition 3.0.17. *Soit k un corps et Ω/k un domaine universel. Soient $X, S \in \mathrm{PSmVar}(k)$ et $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat. Supposons qu'il existe un entier positif n tel que $\mathrm{CH}_l(X_s) = \mathbb{Q}$ pour tout $0 \leq l < n$ et pour tout point $s \in S(\Omega)$. Soit, pour $0 \leq i \leq d_X - d_S$, $L_{N-d_X+d_S-i} \subset \mathbb{P}^N_k$ un sous-espace linéaire de dimension $N - d_X + d_S - i$, et $\xi_i = X \cap L_{N-d_X+d_S-i} = X \cap (S \times L_{N-d_X+d_S-i}) \subset X$ la section linéaire de dimension $d_S + i$, qui est aussi une section linéaire relative du morphisme projectif f de dimension relative i. Les correspondances relatives*

$$p_{2i} = [\xi_i \times_S \xi_{d_X - d_S - i}] \in \mathrm{CH}_{d_X}(X \times_S X)$$

sont des projecteurs relatifs tels que $p_{2i} p_{2j} = 0$ pour $i > j$. On peut donc orthonormaliser cette famille de projecteurs par le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt, on obtient ainsi la famille de projecteurs p^N_{2i}. Ainsi

$$p_\infty := \Delta_X - \sum_{i=0}^{d_X - d_S} p^N_{2i} \in \mathrm{CH}_{d_X}(X \times_S X)$$

est un projecteur relatif autodual, c'est à dire $p^t_\infty = p_\infty$. Il existe alors une variété projective lisse $Z \in \mathrm{PSmVar}(k)$ sur k de dimension $d_X - 2n$ et un projecteur r sur Z tel qu'on ait les isomorphismes de motifs (absolus) suivant dans $\mathcal{M}_{\mathrm{rat}}(k)$:

— $(X, p_\infty) \tilde{\to} (Z, r, n)$,
— $(X, \Delta_X) \tilde{\to} \bigoplus_{i=0}^{d_X - d_S} (X, p_{2i}^N) \oplus (X, p_\infty) \tilde{\to} \bigoplus_{i=0}^{d_X - d_S} (S, \Delta_S)(-i) \oplus (Z, r, n)$.

Démonstration.

La surjection du théorème [77, Thm 3.2] implique que $p_{\infty,\Omega *} \operatorname{CH}_l(X_\Omega) = 0$ pour $0 \leq l < n$. Par autodualité, on a aussi $p^t_{\infty,\Omega *} \operatorname{CH}_l(X_\Omega) = 0$ pour $0 \leq l < n$. Ceci entraîne que $p_{\infty,k(X)*} \operatorname{CH}_l(X_{k(X)}) = p^t_{\infty,k(X)*} \operatorname{CH}_l(X_{k(X)}) = 0$ pour $0 \leq l < n$, car le foncteur

$$F(\Omega/k(X)) : \operatorname{Corr}_{\text{rat}}(\operatorname{PSmVar}(k(X))) \to \operatorname{Corr}_{\text{rat}}(\operatorname{PSmVar}(\Omega))$$

est fidèle. La proposition [77, 4.1] dit alors qu'il existe une variété projective lisse $Z \in \operatorname{PSmVar}(k)$ sur k de dimension $d_X - 2n$ et un projecteur r sur Z tel qu'on ait un isomorphisme de motifs (absolus) dans $\mathcal{M}_{\text{rat}}(k)$:

$$(X, p_\infty) \tilde{\to} (Z, r, n).$$

On en déduit les isomorphismes

$$(X, \Delta_X) \tilde{\to} \bigoplus_{i=0}^{d_X - d_S} (X, p_{2i}^N) \oplus (X, p_\infty) \tilde{\to} \bigoplus_{i=0}^{d_X - d_S} (S, \Delta_S)(-i) \oplus (Z, r, n).$$

□

Remarque 3.0.18. *Soit $f : X \to S$ un fibré en quadriques de dimension impaire $2m - 1$, $X, S \in \operatorname{PSmVar}(\mathbb{C})$, $\dim(S) = 2$. La proposition 3.0.17 dit qu'il existe une courbe projective lisse $C \in \operatorname{PSmVar}(\mathbb{C})$ et un projecteur r sur C tel qu'on ait un isomorphisme de motifs (absolus) dans $\mathcal{M}_{\text{rat}}(\mathbb{C})$:*

$$(X, \Delta_X) \tilde{\to} \bigoplus_{i=0}^{d_X - d_S} (S, \Delta_S)(-i) \oplus (C, r, n).$$

Le point important du chapitre 2 est d'identifier un tel projecteur

$$p_\infty = \Delta_X - \sum_{i=0}^{2m-1} p_{2i}^N \in \operatorname{CH}_{d_X}(X \times_S X)$$

et le motif (X, p_∞). Voir aussi la remarque 1.3.21.

Corollaire 3.0.19. *Soit $f : X \to S$ est un fibré en quadriques de dimension impaire $2m - 1$, $X, S \in \operatorname{PSmVar}(\mathbb{C})$ et $\dim(S) = 2$. Puisque le motif d'une courbe est de dimension fini et que S admet une décomposition de Chow–Künneth qui satisfait les conjectures de Murre II et III, l' isomorphisme de motifs (absolus)*

$$(X, \Delta_X) \tilde{\to} \sum_{i=0}^{d_X - d_S} (S, \Delta_S)(-i) \oplus (C, r, n)$$

donne une décomposition de Chow–Künneth de X qui satisfait aux conjectures de Murre II et III.

• Remarques sur la conjecture IV

Dans la proposition 2.4.7, on a démontré que les conjectures I,II et III de Murre sont vérifiées pour un fibré en quadriques de dimension impaire au-dessus d'une surface S. La question de la conjecture IV se pose. Il y a deux approches possibles.

1. Si le motif de S est de dimension fini (cf. Déf. 1.1.38), alors le motif de X est de dimension fini (voir rem. 2.4.8). Supposons qu'on ait deux décompositions de Chow–Künneth données respectivement par des familles de projecteurs deux à deux orthogonaux $\{p_i\}_{0\leq i\leq 2d_X}$ et $\{p'_i\}_{0\leq i\leq 2d_X}$. Alors par un théorème de Kimura et Murre [38] (notons que les $p_i - p'_i \in \mathrm{CH}_{d_X}(X\times X)$ sont nilpotents, car ils sont homologiquement équivalents à zéro et le motif de X est de dimension fini), on a des isomorphismes de motifs de Chow $\Gamma_i : M_i = (X, p_i)\tilde{\to}N_i = (X, p'_i)$ pour tout i. Ceci implique que les deux filtrations sont isomorphes. Plus précisément, notons $F^\nu \mathrm{CH}^j(X)$ (resp. $F'^\mu \mathrm{CH}^j(X)$) les filtrations associées aux projecteurs p_i (resp p'_i). Comme
$$\begin{aligned} F^\nu \mathrm{CH}^j(X) &= \ker p_{2j} \cap .. \cap \ker p_{2j-\mu} \\ &= \mathrm{Im}\ p_j \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\ p_{2j-\mu} \\ &= \mathrm{CH}^j(M_j) \oplus ... \oplus \mathrm{CH}^j(M_{2j-\mu}) \end{aligned}$$
et de même $F'^\nu \mathrm{CH}^j(X) = \mathrm{CH}^j(M'_j) \oplus ... \oplus \mathrm{CH}^j(M'_{2j-\mu})$, on obtient que $F^\nu \mathrm{CH}^j(X) \simeq F'^\nu \mathrm{CH}^j(X)$ pour tout μ.
2. Une approche plus directe est la suivante. Dans [55, Cor 7.5.9], on montre que la conjecture IV est vraie pour X si les conjectures I, II et III sont vraies pour X et toute les puissances de X. La démonstration de ce corollaire montre qu'il suffit de vérifier les conjectures I, II et III pour X et $X\times X$. Dans notre situation, ceci veut dire qu'il suffit de vérifier les conjectures II et III pour $X\times X$.

• Un isomorphisme de motifs

Dans le chapitre 3, on a montré que les motifs (X, p_{2i}) et (X, p^N_{2i}) sont isomorphes, où p^N_{2i} est obtenu à partir de p_{2i} par le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt. Ce résultat repose sur le fait que $p^N_{2i} - p_{2i}$ est nilpotent d'ordre deux. Plus généralement on a le résultat suivant :

Proposition 3.0.20. *Soient $X \in \mathrm{SmVar}(k)$ une variété lisse munie d'un morphisme propre $f_{X/S} : X \to S$, $S \in \mathrm{QPVar}(k)$, et soient p, $q \in \mathrm{Corr}^0_S(X, X)$ deux projecteurs relatifs tels que $p - q$ est nilpotent. Alors les motifs de Chow relatifs $M = (X, p)$ et $N = (X, q)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(p - q)^n = 0$. Alors on a
$$0 = p \circ (p - q)^n \circ p = p + f(p, q) \circ p.$$
De même
$$0 = q \circ (q - p)^n \circ q = q + f(p, q) \circ q.$$
Par construction $f(p, q) = \sum_i \lambda_i f_i(p, q)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ et
$$f_i(p, q) = p \circ f'_i(p, q) \circ q = \ldots = \underbrace{(p \circ q) \circ (p \circ q) \circ \ldots \circ (p \circ q)}_{i \text{ fois}} = (p \circ q)^i$$
En particulier on a
$$p \circ f(p, q) = f(p, q) = f(p, q) \circ q. \tag{3.0.1}$$
Comme $(q \circ p)^i \circ q = q \circ (p \circ q)^i$ on a $f(q, p) \circ q = q \circ f(p, q)$. On obtient alors les identités
$$0 = p + f(p, q) \circ p \tag{3.0.2}$$
$$0 = q + q \circ f(p, q). \tag{3.0.3}$$
On pose $\alpha = -f(p, q)$. Comme $p \circ \alpha = \alpha \circ q = \alpha$ on a $\alpha : N \to M$. De même pour $\beta = qp$ on a $\beta \circ p = q \circ \beta = \beta$ donc $\beta M \to N$. Alors en utilisant (3.0.1) et (3.0.2) on a
$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta &= -f(p, q) \circ q \circ p \\ &= -f(p, q) \circ p \\ &= p = \mathrm{id}_M \end{aligned}$$

et de même en utilisant (3.0.1) et (3.0.3)

$$\begin{aligned}\beta\circ\alpha &= -q\circ p\circ f(p,q)\\ &= -q\circ f(p,q)\\ &= q=\mathrm{id}_N .\end{aligned}$$

Donc α et β sont des isomorphismes de motifs relatifs. □

Remarque 3.0.21. *(i) Un petit calcul montre que pour des petites valeurs de l'indice de nilpotence n on obtient les polynômes*

$$\begin{aligned} n=2: f(p,q) &= -pq\\ n=3: f(p,q) &= -2pq+pqpq\\ n=4: f(p,q) &= -2pq+pqpq. \end{aligned}$$

(ii) On montre par récurrence sur i que $p\circ q\circ(p-q)^{2i-1}\circ p=0$ pour tout $i\geq 1$. Par conséquent $p(p-q)^{2i}p=p(p-q)(p-q)^{2i-1}p=p(p-q)^{2i-1}p$ et on obtient le même polynôme pour les indices de nilpotence $2i-1$ et $2i$.

• **Remarques sur le théorème 2.1.8**

Première remarque :

On a un énoncé analogue dans le cas pair. Soit $f:X\to S$ un fibré en quadriques de dimension relative paire $2m$ avec $X,S\in\mathrm{PSmVar}(\mathbb{C})$ et $\dim(S)=2$. On a $\dim(X)=n=2m+2$. Considérons la factorisation de Stein $F_m(X/S)\to\tilde{S}\to S$ de la variété de Fano relative des m-plans. Le morphisme $\tilde{S}\to S$ est un revêtement double ramifié au-dessus du discriminant $C=\Delta_1\subset S$ de $f:X\to S$. Notons $\Gamma\subset F_m(X/S)\times_S X$ la correspondance d'incidence et $p:\Gamma\to F_m(X/S)$, $q:\Gamma\to X$ les restrictions à Γ des deux projections. Soit $W\subset F_m(X/S)$ une multisection du morphisme plat projectif $F_m(X/S)\to\tilde{S}$, $\Gamma_W\subset W\times_S X$ la restriction de Γ à W et $Z=q(\Gamma_W)\subset X$. On a $Z\times_S Z=(Z\times_S Z)^+\cup(Z\times_S Z)^-$. Considérons $p_\infty=[(Z\times_S Z)^+-(Z\times_S Z)^-]\in\mathrm{CH}_n(X\times_S X)$, qui est la classe d'un cycle supporté cette fois-ci au-dessus de toute la base S.

Le théorème principal est dans ce cas le suivant (on donnera une esquisse de la preuve) :

Théorème 3.0.22. *Soit $f:X\to S$ un fibré en quadriques de dimension relative paire $2m$ avec $X,S\in\mathrm{PSmVar}(\mathbb{C})$ et $\dim(S)=2$. On a $\dim(X)=n=2m+2$. On suppose que $C=\Delta_1$ est lisse, donc $\Delta_2=\emptyset$. Alors*

(1) L'orthonormalisation $(\{p_{2i}^N\}_{0\leq i\leq 2m}, p_\infty^N)$ de la famille $(\{p_{2i}\}_{0\leq i\leq 2m}, p_\infty)$ constitue une décomposition de Chow–Künneth relative de $f:X\to S$.

(2) Cette décomposition de Chow–Künneth relative induit une décomposition de Chow–Künneth absolue de X qui vérifie aux conjectures de Murre I, II et III.

Démonstration.

(1) L'égalité $\Delta_X=\sum_i p_{2i}^N+p_\infty^N\in\mathrm{CH}_n(X\times_S X)$ vient du fait que $R:=\Delta_X-\sum_i p_{2i}^N-p_\infty^N\in\mathrm{CH}_n(X\times_S X)$ est nilpotent. Ceci suit du fait que R agit par zéro sur $Rf_*\mathbb{Q}_X$ et de la description de $\mathrm{CH}_n(X\times_S X)$ via la suite exacte de localisation

$$\mathrm{CH}_n(X_C\times_C X_C)\xrightarrow{(i_C\times i_C)_*}\mathrm{CH}_n(X\times_S X)\xrightarrow{(j_U\times j_U)^*}\mathrm{CH}_n(X_U\times_U X_U)\to 0,$$

où $U=S\backslash C$, $i_C\times i_C: X_C\times_C X_C\hookrightarrow X\times_S X$, $j_U\times j_U: X_U\times_U X_U\hookrightarrow X\times_S X$, et les surjections des propositions 3.0.15 et 3.0.14.

Puisque C est lisse, $\tilde{S}$ est lisse et on peut donc définir de motif de Prym $(\tilde{S},\rho)$, où $\rho=1/2(I-\tau^*)\in\mathrm{CH}_2(\tilde{S}\times_S\tilde{S})$ est le projecteur de Prym, τ étant l'involution du revêtement double $\tilde{S}\to S$.

(2) On déduit alors de (1), et du fait que $(X,p_\infty^N)\tilde{\to}(X,p_\infty)\tilde{\to}(\tilde{S},\rho)$, l'isomorphisme de motifs de Chow

$$(X,\Delta_X))\tilde{\to}\oplus_i(S,\Delta_S)(-2i)\oplus(\tilde{S},\rho).$$

Ceci entraîne (2).

□

Remarque 3.0.23. *Notons que si $\Delta_2 = \{s_1, .., s_r\} \neq \emptyset$, il y a des projecteurs de $X \times_S X$ supportés sur $X_{s_k} \times X_{s_k}$.*

Deuxième remarque :

Considérons maintenant le cas impaire mais sans hypothèse sur le discriminant. Soit $f : X \to S$ un fibré en quadriques de dimension relative impaire $2m-1$ avec $X, S \in \mathrm{PSmVar}(\mathbb{C})$ et $\dim(S) = 2$. On considère le cas où le discriminant $C = \cup_j C_j$ de $f : X \to S$ est non lisse et réductible, les C_j étant les composantes irréductibles. On rappelle qu'on note $F_m(X/S) \to \tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ la factorisation de Stein et $\Gamma \subset F_m(X/S) \times_S X$ la correspondance d'incidence. La restriction de π au-dessus d'une composante C_j, $\tilde{C}_j = \pi^{-1}(C_j) \subset \tilde{C}$, est composée soit d'une composante irréductible (cas où le revêtement double induit est non-trivial), soit de deux composantes irréductibles (cas où le revêtement double induit est trivial). On se fixe une composante irréductible C_j et on considère :

— La normalisation $n : N(\tilde{C}_j) \to \tilde{C}_j$ de $\tilde{C}_j$. Le morphisme structural $\pi \circ n : N(\tilde{C}_j) \to \tilde{C}_j \to C_j$ se factorise par la normalisation $\overline{n} : N(C_j) \to C_j$ de C_j : $\pi \circ n = \overline{n} \circ N(\pi)$, $N(\pi) : N(\tilde{C}_j) \to N(C_j)$.
— Le changement de base $g : F_m(X/S)_n = F_m(X/S) \times_{\tilde{C}_j} N(\tilde{C}_j) \to N(\tilde{C}_j)$.
— Une multisection lisse $W_j \subset F_m(X/S)_n$ du morphisme g (qui est projectif lisse) ; on note encore $g : W_j \to N(\tilde{C}_j)$.
— La correspondance d'incidence $\Gamma_{W_j} \subset W_j \times_S X$.
— La projection $p_X : \Gamma_{W_j} \subset W_j \times_S X \to X$; on pose $Z = p_X(\Gamma_{W_j}) \subset X$.
— La projection $p_{W_j} : \Gamma_{W_j} \subset W_j \times_S X \to W_j$.
— Le cycle $p_{\infty,j} = [(Z \times_{C_j} Z)^+ - (Z \times_{C_j} Z)^-] \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$.
— Le lieu lisse C_j^o de C_j. Le revêtement double $\pi : \tilde{C}_j^o \to C_j^o$ induit par π au-dessus de l'ouvert C_j^o qui est aussi la restriction du revêtement double $N(\pi) : N(\tilde{C}_j) \to N(C_j)$ au-dessus de l'ouvert C_j^o, est alors non ramifié. On a $\tilde{C}_j^o \times_{C_j^o} \tilde{C}_j^o = \Delta_j \sqcup \tau_j$, où Δ_j est la diagonale et τ_j est le graphe de l'involution associée au revêtement étale $\tilde{C}_j^o \to C_j^o$. On note $\overline{\Delta_j}$, respectivement $\overline{\tau_j}$, l'adhérence de Δ_j, respectivement de τ_j, dans $N(\tilde{C}_j) \times_{C_j} N(\tilde{C}_j)$, et on définit le cycle $\rho_j = \overline{\Delta_j} - \overline{\tau_j} \in \mathrm{CH}_1(N(\tilde{C}_j) \times_{C_j} N(\tilde{C}_j))$.

On note $p_\infty = \sum_j p_{\infty,j} = \sum_j [(Z \times_{C_j} Z)^+ - (Z \times_{C_j} Z)^-] \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$.

Le théorème principal est dans ce cas le suivant (on donnera une esquisse de la preuve) :

Théorème 3.0.24. *Soit $f : X \to S$ un fibré en quadriques de dimension relative impaire $2m-1$, avec $X, S \in$ $\mathrm{PSmVar}(\mathbb{C})$ et $\dim(S) = 2$. On a $\dim(X) = n = 2m+1$. Soit $C = \cup_j C_j \subset S$ le discriminant de $f : X \to S$, les C_j étant les composantes irréductibles. Alors, avec les notations ci-dessus :*

(1) L'orthonormalisation $(\{p_{2i}^N\}_{0 \leq i \leq 2m}, \{p_{\infty,j}^N\}_j)$ de la famille $(\{p_{2i}\}_{0 \leq i \leq 2m}, \{p_{\infty,j}\}_j)$ constitue une décomposition de Chow–Künneth relative de $f : X \to S$.

(2) Cette décomposition de Chow–Künneth relative induit une décomposition de Chow–Künneth absolue de X qui vérifie les conjectures de Murre I, II et III.

Démonstration.

(1) On a la composition de correspondances relatives suivante :

$$p_{\infty,j} = (p_X \times p_X)_* (p_{W_j} \times p_{W_j})^* (g \times g)^* \rho_j = \Gamma_{W_j} g_* \rho_j g^* \Gamma_{W_j}^t.$$

On en déduit aisément, après le calcul de $g_* \Gamma_{W_j}^t \Gamma_{W_j} g^* \in \mathrm{CH}_1(N(\tilde{C}_j) \times_{C_j} N(\tilde{C}_j))$, que $p_{\infty,j}$ est un projecteur. Les $p_{\infty,j}$ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux et on a l'existence d'un isomorphisme de motifs $(X, p_{\infty,j}) \to (N(\tilde{C}_j), \rho_j)$. Ici, le point clé est que le support de la correspondance relative $g_* \Gamma_{W_j}^t \Gamma_{W_j} g^* \in \mathrm{CH}_1(N(\tilde{C}_j) \times_{C_j} N(\tilde{C}_j))$ est de dimension 1, donc est de même dimension que la variété (non irréductible) $N(\tilde{C}_j) \times_{C_j} N(\tilde{C}_j)$, qui a deux composantes irréductibles, toutes les deux de dimension 1. On peut ainsi calculer $g_* \Gamma_{W_j}^t \Gamma_{W_j} g^* \in \mathrm{CH}_1(N(\tilde{C}_j) \times_{C_j} N(\tilde{C}_j))$ au-dessus de l'ouvert $C_j^o \subset C_j$.

L'égalité

$$\Delta_X = \sum_i p_{2i}^N + \sum_j p_{\infty,j}^N \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$$

vient du fait que $R := \Delta_X - \sum_i p_{2i}^N - \sum_j p_{\infty,j}^N \in \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ est nilpotent. Ceci suit du fait que R agit par zéro sur $Rf_*\mathbb{Q}_X$ et de la description de $\mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ via la suite exacte de localisation

$$\mathrm{CH}_n(X_C \times_C X_C) \xrightarrow{(i_C \times i_C)_*} \mathrm{CH}_n(X \times_S X) \xrightarrow{(j_U \times j_U)^*} \mathrm{CH}_n(X_U \times_U X_U) \to 0,$$

où $U = S\backslash C$, $i_C \times i_C : X_C \times_C X_C \hookrightarrow X \times_S X$, $j_U \times j_U : X_U \times_U X_U \hookrightarrow X \times_S X$. En effet, la proposition 3.0.14 donne une description de $\mathrm{CH}_n(X_U \times_U X_U)$. On obtient des générateurs du sous-espace $\mathbb{Q}$-vectoriel $(i_C \times i_C)_* \mathrm{CH}_n(X_C \times_C X_C) \subset \mathrm{CH}_n(X \times_S X)$ comme suit. Soit $f_j : X_{W_j} = X \times_S W_j \to W_j$ et $n_{W_j} : X_{W_j} = X \times_S W_j \to X_{C_j} \subset X$ le changement de base. Soit $\epsilon_j : \widetilde{X_{W_j}}_{e(W_j)} \to X_{W_j}$ l'éclatement. Considérons :

— Le morphisme $f_j \circ \epsilon_j : \widetilde{X_{W_j}}_{e(W_j)} \to W_j$, qui se factorise par $f_j \circ \epsilon_j : \widetilde{X_{W_j}}_{e(W_j)} \xrightarrow{h} X_{W_j}^H \xrightarrow{f_j^H} W_j$, où h est un fibré en $\mathbb{P}^1$ et $f_j^H : X_{W_j}^H \to W_j$ est un fibré en quadriques lisse de dimension relative paire $2m-2$ admettant une décomposition cellulaire relative.

— Le morphisme $\lambda_j = n_{W_j} \circ \epsilon_j : \widetilde{X_{W_j}}_{e(W_j)} \to X$.

La surjection de la proposition 3.0.15, appliquée au fibré $f_j^H : X_{W_j}^H \to W_j$ admettant une décomposition cellulaire relative, donne des générateurs de $\mathrm{CH}_{n-2}(X_{W_j}^H \times_{W_j} X_{W_j}^H)$. On obtient ainsi des générateurs de

$$(i_C \times i_C)_* \mathrm{CH}_n(X_C \times_C X_C) = \sum_j (i_{C_j} \times i_{C_j})_* \mathrm{CH}_n(X_{C_j} \times_{C_j} X_{C_j}) = \sum_j (\lambda_j \times \lambda_j)_*(h \times h)^* \mathrm{CH}_{n-2}(X_{W_j}^H \times_{W_j} X_{W_j}^H),$$

que l'on peut exprimer comme une composition de correspondances relatives par (ii) de la proposition 1.3.13.

(2) On déduit alors de (1), et du fait que $(X, p_\infty^N) \tilde{\to} (X, p_\infty) \tilde{\to} \oplus_j (N(\tilde{C}_j), \rho_j)$, l'isomorphisme de motifs de Chow

$$(X, \Delta_X) \tilde{\to} \oplus_i (S, \Delta_S)(-2i) \oplus \oplus_j (N(\tilde{C}_j), \rho).$$

Ceci entraîne (2).

□

Remarque 3.0.25. *Dans le cas où le revêtement $\tilde{C}_j \to C_j$ est trivial, on a quatre composantes irréductibles de $Z \times_{C_j} Z$ et le projecteur $p_{\infty,j}$ se décompose en quatre cycles irréductibles. Alors $N(\tilde{C}_j) = N(C_j) \sqcup N(C_j)$, et le motif de Prym est $(N(\tilde{C}_j), \rho_j) \simeq (N(C_j), \Delta_{N(C_j)})$. Deux exemples de fibrés en coniques dont le revêtement est trivial se trouvent au chapitre 5, section 5.3.10.*

Corollaire 3.0.26. *L'isomorphisme de motifs de Chow $(X, \Delta_X) \tilde{\to} \oplus_i (S, \Delta_S)(-2i) \oplus \oplus_j (N(\tilde{C}_j), \rho)$ entraîne en particulier, dans le cas où $S = \mathbb{P}^2$, les isomorphismes*

— $H^{2m+1}(X, \mathbb{Q}) \tilde{\to} \oplus_j H^1(N(\tilde{C}_j), \mathbb{Q})^-$,

— $\mathrm{CH}_{\mathrm{alg}}^{m+1}(X, \mathbb{Q}) \tilde{\to} \oplus_j CH_{\mathrm{alg}}^1(N(\tilde{C}_j), \mathbb{Q})^-$.

On rappelle à ce propos le résultat de Beauville [4] : Dans le cas où $S = \mathbb{P}^2$, on a l'isomorphisme de variétés abéliennes polarisées : $J(X) = H^{m+1,m}(X)/H^{2m+1}(X, \mathbb{Z}) \tilde{\to} \mathrm{Prym}\,(N(\tilde{C}_j), \tau) = H^{1,0,-}(N(\tilde{C}_j))/H^1(N(\tilde{C}_j), \mathbb{Z})$.

Deuxième partie

Jacobiennes intermédiaires relatives des paires $K3$-Fano

Chapitre 4

Préliminaires et notions de base

Sommaire

4.1 Classification des variétés de Fano de dimension trois

Pour $X \in \mathrm{PSmVar}\,(\mathbb{C})$, on note $K_X \in \mathrm{Pic}\,(X)$ le diviseur canonique (modulo équivalence rationnelle) et $\omega_X = O_X(K_X)$ le fibré en droites canonique. Le fibré en droites dual $\omega_X^{-1} = O_X(-K_X)$ est appelé anticanonique et $-K_X \in \mathrm{Pic}\,(X)$ est le diviseur anticanonique.

Définition 4.1.1. *Une variété de Fano est une variété projective lisse $X \in \mathrm{PSmVar}\,(\mathbb{C})$ dont le fibré anticanonique $\omega_X^{-1} = O_X(-K_X)$ est ample.*

On rappelle le théorème de Riemann–Roch–Hirzebruch.

Théorème 4.1.2. — *Soit $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé, $X, Y \in \mathrm{SmVar}\,(k)$. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\,(X)$.*

$$ch(i_*\mathcal{F}) = i_*(ch(\mathcal{F}) \cdot td(N_{X/Y})^{-1}).$$

— *Soit $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ une variété projective lisse. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\,(X)$.*

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \int_X ch(\mathcal{F}) \cdot td(X).$$

Démonstration. Voir [24], le début de la section 15.1 pour le cas d'un plongement fermé et le Corollaire 15.2.1 pour le deuxième énoncé. □

Proposition 4.1.3. *Une variété de Fano X de dimension n vérifie les propriétés suivantes :*
- — $H^i(X, O_X) = 0$ *pour* $i > 0$. *En particulier,* $q(X) = \dim H^1(X, O_X) = 0$ *et* $b_1(X) = \dim H^1(X, \mathbb{C}) = 0$.
- — $\mathrm{Pic}^{\,o}(X) = H^{0,1}(X)/H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$, *et l'application* $cl : \mathrm{Pic}\,(X) \to H^2(X, \mathbb{Z}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$ *est un isomorphisme. En particulier,* $\mathrm{Pic}\,(X) = NS^1(X)$.
- — *Si* $n = 3$, *on a* $\chi(X, O_X) = h^0(X, O_X) = -1/24 K_X \cdot c_2(X) = 1$ *et* $\chi(X, -K_X) = h^0(X, -K_X) = 1/2(-K_X)^3 + 3$.

Démonstration. La proposition est une conséquence immédiate du théorème d'annulation de Kodaira, de la décomposition de Hodge et du théorème de Riemann–Roch–Hirzebruch. □

Définition 4.1.4. *Soit X une variété de Fano de dimension n. On a $-K_X = rH$, où H est une classe primitive de diviseurs ample et $r \in \mathbb{N}^*$ est un entier strictement positif. On appelle r l'indice de X et $d = H^n$ le degré de X.*

Proposition 4.1.5. *Soit X une variété de Fano de dimension n. Alors $0 < r \leq n+1$.*

Démonstration. Le théorème d'annulation de Kodaira donne $\chi(X, kH) = \chi(X, K_X - K_X + kH) = \chi(X, K_X + (k+r)H) = 0$ pour $-r+1 \leq k \leq 1$. Comme c'est un polynôme de degré $\dim(X) = n$ en k, on a $r - 1 \leq n$, c'est à dire $r \leq n+1$. □

Si $r = n+1$, alors X est l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. Si $r = n$, alors $X = V(f_2) \subset \mathbb{P}^{n+1}$ est une hypersurface de degré 2 (pour plus de précision, voir [33]).

Définition 4.1.6. *Soit X une variété de Fano de dimension n. Le genre de X est $g(X) = \frac{1}{2}(-K_X)^n + 1$.*

Remarque 4.1.7. *Si $-K_X$ est très ample, alors $g(X)$ est le genre d'une courbe section générique lisse $C = H'_1 \cap .. \cap H'_{n-1} \cap X$ par des hyperplans $H'_i \in |-K_X|$.*

On s'intéresse maintenant aux variétés de Fano de dimension $n = 3$.

Variétés de Fano de dimension trois et d'indice $r = 2$

Les variétés de Fano de dimension trois et d'indice deux sont aussi appelées variétés de Del Pezzo. Comme précédemment, on note par H le diviseur ample primitif sur X tel que $-K_X = rH$. Les variétés de Del Pezzo ont été classifiées par Fano et Iskovskikh (voir [33]). On note par d le degré de la classe ample H, i.e. $d = H^3$, et on démontre que les variétés de Del Pezzo existent seulement pour les degrés $1 \leq d \leq 7$. Pour chaque d dans cet intervalle, il existe une seule famille de déformations de variétés de Del Pezzo de degré d, que l'on note par V_d. En voici la liste complète :

- V_1 est un revêtement double du cône au-dessus d'une surface de Veronese ramifié en une cubique.
- V_2 est un revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié en une surface lisse de $\mathbb{P}^3$ de degré 4.
- $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ est une hypersurface cubique.
- $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ est une intersection complète lisse de deux quadriques.
- $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ est une section linéaire de $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ par un sous-espace de codimension 3.
- $V_6 \subset \mathbb{P}^7$ est l'image de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ par le plongement de Segre.
- $V_7 \subset \mathbb{P}^8$ est l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en un point.

Remarquons que le système linéaire $|H|$ a un point fixe pour $d = 1$, définit un revêtement double de $\mathbb{P}^3$ pour $d = 2$, et est très ample pour $3 \leq d \leq 7$. Dans le dernier cas, $|H|$ donne un plongement de X dans $\mathbb{P}^{d+1}$ ($\dim |H| = d+1$).

Variétés de Fano de dimension trois avec $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$

Les variétés de Fano de dimension trois d'indice un et de groupe de Picard de rang un ont aussi été classifiées par Fano et Iskovskikh. Elles sont appelées variétés de Fano de la série principale. Pour celles-ci, le système linéaire $|H|$ n'a pas de points fixes, et les membres lisses de $|H|$ sont des surfaces $K3$. Les courbes qui s'obtiennent comme intersections complètes lisses de deux diviseurs de $|H|$ sont de genre g, où $d = 2g - 2$ est le degré de la variété X pour la polarisation $-K_X = H$. Il y a 10 classes de déformation de variétés de Fano X_d, X'_d de la série principale :

- $X'_2 \to \mathbb{P}^3$, un solide double (i.e. un revêtement double de $\mathbb{P}^3$) ramifié en une surface lisse de degré 6.
- $X_4 \subset \mathbb{P}^4$, une quartique, ou $X'_4 \to Q \subset \mathbb{P}^4$, un revêtement double d'une quadrique lisse Q ramifié en une surface lisse de degré 8.
- $X_6 \subset \mathbb{P}^5$, une intersection complète d'une quadrique et d'une cubique.
- $X_8 \subset \mathbb{P}^6$, une intersection complète de trois quadriques.
- $X_{10} \subset \mathbb{P}^7$, une intersection de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,5)$, plongée dans $\mathbb{P}^9$ par les coordonnées de Plücker, avec un sous-espace linéaire de codimension 2 et une quadrique, ou $X'_{10} \subset \mathbb{P}^7$ une section lisse d'un cône dans $\mathbb{P}^7$ au-dessus d'une variété de Del Pezzo $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ de degré 5 par une quadrique.
- $X_{12} \subset \mathbb{P}^8$, une section linéaire transversale de la variété spinorielle de dimension 10 dans $\mathbb{P}^{15}$ par un sous-espace projectif $\mathbb{P}^7$.

— $X_{14} \subset \mathbb{P}^9$, une section linéaire transversale de la grassmannienne $\mathrm{Gr}\,(2,6)$, plongée par les coordonnées de Plücker, par un sous-espace de codimension 5.
— $X_{16} \subset \mathbb{P}^{10}$, une section linéaire transversale de codimension 3 de la grassmannienne lagrangienne $\mathrm{LGr}\,(3,6)$ dans son plongement naturel dans $\mathbb{P}^{13}$.
— $X_{18} \subset \mathbb{P}^{11}$, une section linéaire transversale de codimension 2 de l'orbite minimale du groupe exceptionnel G_2, opérant sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{13}$ par l'action adjointe projectivisée.
— $X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$, le lieu des zéros d'une section, transversale à la section nulle, du fibré $\wedge^2 U^* \oplus \wedge^2 U^* \oplus \wedge^2 U^*$ sur $\mathrm{Gr}\,(3,7)$, où U est le sous-fibré tautologique de rang trois du fibré trivial de rang 7 sur $\mathrm{Gr}\,(3,7)$.

Les variétés X_d et X'_d sont équivalentes par déformations ($d = 4$ ou 10). On marque par une prime les variétés de Fano de la série principale, pour lesquelles le système anticanonique ne donne pas un plongement mais un revêtement double. Les descriptions que nous reproduisons pour les variétés X_d pour $d = 12, 16, 18$ et 22 ont été trouvées par Mukai (voir les références dans [33]). Si on ajoute, aux 10 classes de déformations de variétés de Fano de la série principale, les 5 classes de variétés de Del Pezzo V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, une quadrique lisse $Q \subset \mathbb{P}^4$ (d'indice $r = 3$) et l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ (d'indice $r = 4$), on obtiendra toutes les 17 classes de déformations de variétés de Fano de dimension trois et de nombre de Picard un.

Variétés de Fano de dimension trois avec $\mathrm{rg}\,(\mathrm{Pic}\,(X)) \geq 2$

Les variétés de Fano de dimension trois et de nombre de Picard supérieur ou égal à deux ont été classifiées par Mori et Mukai [45], [47] : il y a exactement 88 classes de déformations de telles variétés. En effet, une telle variété de Fano X est soit l'éclaté d'une variété de Fano de nombre de Picard un, soit un fibré en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^2$ ou de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, soit l'éclaté d'un tel fibré en coniques.

Il y a en tout $105 = 88 + 17$ classes de déformation de variétés de Fano de dimension trois.

4.2 Surfaces $K3$

Définition 4.2.1. *Une surface $K3$ est une variété analytique compacte S de dimension 2 dont le fibré canonique ω_S est trivial et telle que $q(S) = \dim\, H^1(S, O_S) = 0$.*

Une surface $K3$ est automatiquement kählerienne par le résultat de Siu [72].

Proposition 4.2.2. *Soit S une surface $K3$.*
— *On a $\mathrm{Pic}^{\,o}(S) = H^{0,1}(S)/H^1(S,\mathbb{Z}) = 0$, l'application $cl : \mathrm{Pic}\,(S) \to H^2(S,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(S)$ est un isomorphisme et $\mathrm{Pic}\,(S) = NS^1(S)$.*
— *Les seuls nombres de Hodge non nuls de S sont $h^{0,0} = h^{0,2} = h^{2,0} = h^{2,2} = 1$, $h^{1,1} = 20$. Cela entraîne que $\chi_{\mathrm{top}}(S) = c_2(S) = 24$.*
— *Le réseau $H^2(X,\mathbb{Z})$ muni de la forme d'intersection (cup produit) est de signature $(3,19)$ et est isomorphe à $E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus U^{\oplus 3}$. En particulier la forme d'intersection est paire.*
— *Si $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}\,(S)$ est tel que $(\mathcal{L}^2) \geq -2$, alors soit $\mathcal{L}$, soit $\mathcal{L}^{-1}$ est effectif.*

Démonstration. Voir [3]. □

Proposition 4.2.3. *Soit S une surface $K3$ et $C \subset S$ une courbe irréductible. On a $(C^2) = 2p_a(C) - 2 \geq -2$ et $\dim\,(|C|_S) = p_a(C)$. En particulier, pour $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}\,(S)$, $(\mathcal{L}^2) \geq -2$ si et seulement si, soit $\mathcal{L}$, soit $\mathcal{L}^{-1}$ est effectif.*

Démonstration. Par le théorème de Riemann–Roch–Hirzebruch $\chi(S, O_S(C)) = \frac{1}{2}(C^2) + 2$. Le théorème de Riemann–Roch pour C dit que $\chi(C, O_S(C)_{|C}) = (C^2) + 1 - p_a(C)$, où $p_a(C)$ est le genre arithmétique de C. La suite exacte

$$0 \to O_S \to O_S(C) \to O_S(C)_{|C} \to 0$$

implique que $\chi(C, O_S(C)_{|C}) = \chi(S, O_S(C)) - \chi(S, O_S)$. Donc $(C^2) + 1 - p_a(C) = \frac{1}{2}(C^2)$, ce qui entraîne

$$(C^2) = 2p_a(C) - 2.$$

Puisque $K_S = O_S$, dim $H^2(S, O_S(C)) = H^0(S, O_S(-C)) = 0$ et dim $H^1(S, O_S(C)) = \dim H^1(S, O_S(-C))$. De plus, comme $H^1(S, O_S) = 0$, la suite exacte

$$0 \to O_S(-C) \to O_S \to O_C \to 0$$

donnent dim $H^1(S, O_S(-C)) = \dim H^0(C, O_C) - \dim H^0(S, O_S) = 0$. On en déduit

$$\chi(S, O_S(C)) = \dim H^0(S, O_S(C)).$$

Le système linéaire $|C|_S$ a donc pour dimension

$$\dim(|C|_S) = \dim H^0(S, O_S(C)) - 1 = \chi(S, O_S(C)) - 1 = \frac{1}{2}(C^2) + 1 = p_a(C),$$

où $p_a(C)$ est le genre arithmétique d'une courbe de ce système linéaire. □

On définit pour un entier positif d le champ algébrique des surfaces $K3$ polarisées de degré d.

Définition 4.2.4. *Soit* $\mathcal{K}_d$:$\mathrm{Var}(\mathbb{C})^o \to (\mathrm{Sets})$ *le foncteur, qui associe à une variété algébrique* $B \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ *l'ensemble* $\mathcal{K}_d(B) = \{(f : Y \to B, \mathcal{L})\} / \sim$*, où* $Y \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ *,* $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(Y)$*, et* $f : Y \to B$ *est un morphisme plat tel, que pour tout* $b \in B$*, la fibre* Y_b *est une surface K3 et* $\mathcal{L}_b = \mathcal{L}_{|Y_b}$ *est ample avec* $c_1(\mathcal{L}_b)^2 = d$*. La relation d'équivalence* $\sim$ *est définie comme suit :* $(f : Y \to B, \mathcal{L}) \sim (f' : Y' \to B, \mathcal{L}')$ *si et seulement si il existe un* B*-isomorphisme* $g : Y \to Y'$ *et* $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}(B)$*, tel que* $g^*\mathcal{L}' \simeq \mathcal{L} \otimes f^*\mathcal{N}$*.*

Définition 4.2.5. *Un foncteur* $F : \mathrm{Var}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Sets}$ *est coreprésentable par une variété algébrique* $X \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$*, si pour tout* $Y \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ *et toute section* s *de* $F(Y)$ *il existe un unique morphisme* $h : Y \to X$ *tel que* $F(h)(s) = X(Y)(s)$*.*

Théorème 4.2.6. *Le foncteur* $\mathcal{K}_d$ *est coreprésentable par la variété quasi-projective* $K_d \in \mathrm{QPVar}(\mathbb{C})$*, obtenue comme le quotient* $K_d = \mathcal{H}_d//PGL(N)$ *dans le sens de la théorie géométrique des invariants, où* $\mathcal{H}_d \subset \mathrm{Quot}(\mathbb{P}^N, O_{\mathbb{P}^N}, P)$ *est un ouvert du schéma de Hilbert des sous-schémas de* $\mathbb{P}^N$*,* $N = 9\frac{d}{2} + 1$*, au polynôme de Hilbert* $P(m) = \frac{d}{2}m^2 + 2$*.*

Démonstration. Soit $(S, \mathcal{L}_s) \in \mathcal{K}_d(s)$, où $s = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$, une surface $K3$ polarisée de degré d. Par le théorème de Riemann–Roch–Hirzebruch, dim $H^0(S, \mathcal{L}_s^{\otimes 3}) = 9\frac{d}{2} + 2$, et $\mathcal{L}_s^{\otimes 3}$ est très ample par un résultat de Saint-Donat [68]. Donc le système linéaire $|\mathcal{L}_s^{\otimes 3}|$ plonge S dans $\mathbb{P}^N$, où $N = 9\frac{d}{2} + 1$. On a donc un morphisme de foncteurs

$$\mathcal{K}_d \to \mathrm{Quot}(\mathbb{P}^N, O_{\mathbb{P}^N}, P)$$

qui transforme une famille $(f : Y \to B, \mathcal{L}) \in \mathcal{K}_d(B)$ de surfaces $K3$ polarisées de degré d au-dessus d'une variété algébrique $B \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ en la famille $(Y \hookrightarrow B \times \mathbb{P}^N) \in \mathrm{Quot}(\mathbb{P}^N, O_{\mathbb{P}^N}, P)(B)$ de leurs plongements dans $\mathbb{P}^N$ par le fibré relativement très ample $\mathcal{L}^{\otimes 3} \in \mathrm{Pic}(Y)$ pour f. Soit $\mathcal{H}_d \subset \mathrm{Quot}(\mathbb{P}^N, O_{\mathbb{P}^N}, P)$ l'ouvert maximal paramétrant les surfaces $K3$ plongées lisses irréductibles. Alors $\mathcal{H}_d$ est $PGL(N)$-invariant et tous les points de $\mathcal{H}_d$ sont stables [31], d'où le résultat. □

De même on définit le champ algébrique des surfaces $K3$ primitivement polarisées de degré d.

Définition 4.2.7. *Soit* $\mathcal{K}'_d$:$(\mathrm{Var}(\mathbb{C}))^o \to \mathrm{Sets}$ *le foncteur, qui associe à* $B \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ *l'ensemble* $\mathcal{K}'_d(B) = \{(f : Y \to B, \mathcal{L})\} / \sim$ *des paires formées, comme précédemment, d'une famille plate* $f : Y \to B$ *de surfaces K3,* $Y \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$*, et d'un fibré en droites* $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(Y)$ *relativement ample pour* f *avec, cette fois, la restriction supplémentaire que* $c_1(\mathcal{L}_b) \in H^{1,1}(Y_b) \cap H^2(Y_b, \mathbb{Q})$ *soit primitif de degré* d *pour tout* $b \in B$*.*

Théorème 4.2.8 ([32])**.** *Le foncteur* $\mathcal{K}'_d$ *est coreprésentable par la variété quasi-projective irréductible* $K'_d = \mathcal{H}'_d//PGL(N) \in \mathrm{QPVar}(\mathbb{C})$*, où* $\mathcal{H}'_d$ *est un ouvert du schéma de Hilbert,* $\mathcal{H}'_d \subset \mathcal{H}_d \subset \mathrm{Quot}(\mathbb{P}^N, O_{\mathbb{P}^N}, P)$*.*

Mentionnons maintenant le théorème de Noether-Lefschetz pour les surfaces $K3$ de degré d.

Proposition 4.2.9 ([32]). *Pour une surface $K3$ primitivement polarisée $(S,H) \in K'_d$ générale,* $\mathrm{Pic}\,(S) = \mathbb{Z}[H]$. *Les surfaces $K3$ primitivement polarisées $(S,H) \in K'_d$ de nombre de Picard supérieur ou égal à deux forment une réunion dénombrable et dense de fermés de K'_d.*

Lemme 4.2.10. *Soit $(\Lambda, (\cdot,\cdot))$ un réseau. Il y a une bijection entre le domaine des périodes*

$$\mathcal{D} = \{[x] \in \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}), (x,x) = 0 \text{ et } (x,\overline{x}) > 0\} \subset \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}),$$

où $\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, et les structures de Hodge polarisées de poids 2 sur $(\Lambda, (\cdot,\cdot))$ telles que toute classe $\sigma \neq 0$ de type $(2,0)$ satisfait $(\sigma,\sigma) = 0$, $(\sigma,\overline{\sigma}) > 0$ et σ est orthogonal à $\Lambda^{1,1}$.

Soit maintenant $\Lambda = E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus U^{\oplus 3}$ le réseau $K3$ et $l \in \Lambda$ un élément primitif de carré $l^2 = d$, $d \in 2\mathbb{Z}$, $d \geq 2$. Soit $\Lambda_l = l^{\perp} \subset \Lambda$ le supplémentaire orthogonal. On considérera :

— le domaine de périodes des surfaces $K3$ $\mathcal{D} = \{[x] \in \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}), (x,x) = 0 \,\mathrm{et}\, (x,\overline{x}) > 0\} \subset \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$,

— le domaine de périodes des surfaces $K3$ polarisées par l, défini par $\mathcal{D}_l = \{[x] \in \mathcal{D}, (x,l) = 0\} \subset \mathcal{D}$.

Remarquons que pour chaque $d \in 2\mathbb{Z}$, $d \geq 2$, il y a une et une seule $O(\Lambda)$-orbite d'éléments primitifs l de carré d dans Λ, donc Λ_l, D_l ne dépendent que de d, à une transformation de $O(\Lambda)$ près, et seront notés Λ_d, D_d respectivement.

Définition 4.2.11. *Soit $f : X \to B$ une famille propre et lisse de surfaces $K3$, où X, B sont des espaces analytiques sur $\mathbb{C}$. On suppose, pour simplifier, que B est une variété complexe lisse (et donc aussi X). Si B est simplement connexe, alors on fixe $0 \in B$ et on a des isomorphismes naturels $H^2(X,\mathbb{Z}) \tilde{\to} H^2(X_0,\mathbb{Z})$ et $H^2(X,\mathbb{Z}) \tilde{\to} H^2(X_b,\mathbb{Z})$, pour tout $b \in B$. De plus, on fixe un isomorphisme $\phi : H^2(X_0,\mathbb{Z}) \tilde{\to} \Lambda$. On définit alors, si B est simplement connexe, l'application des périodes*

$$\mathcal{P} : B \to \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}), b \mapsto \phi(H^{2,0}(X_b)).$$

Théorème 4.2.12. *Soit X_0 une surface $K3$ et $f : X \to B := Def(X_0)$ sa déformation universelle. Alors B est lisse de dimension 20 et*

$$\mathcal{P} : B \to D \subset \mathbb{P}(H^2(X_0,\mathbb{C})) = \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}), b \mapsto \phi(H^{2,0}(X_b))$$

est un isomorphisme local.

Corollaire 4.2.13. *(i) Une surface $K3$ X_0 est équivalente par déformation à une quartique $K3$.*

(ii) Puisque deux quartiques lisses sont équivalentes par déformation, le point (i) implique que deux surfaces $K3$ sont équivalentes par déformation.

Soit $f : X \to B$ une famille projective lisse de surfaces $K3$ primitivement polarisées par un fibré en droites L, $X, B \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$ et $L \in \mathrm{Pic}\,(X)$ est relativement ample de degré d. Il existe un revêtement étale $\tilde{B} \to B$, tel que $\tilde{B}$ est simplement connexe et l'application de périodes

$$\mathcal{P} : \tilde{B} \to D_d$$

passe au quotient pour donner le morphisme

$$\mathcal{P} : B = \tilde{B}/O(\Lambda_d) \to \mathcal{D}_d/O(\Lambda_d),$$

que l'on note par le même symbole $\mathcal{P}$.

Théorème 4.2.14. *Soit $f : X \to \mathcal{H}'_d$ la famille universelle des surfaces $K3$ primitivement polarisées de degré d plongées dans $\mathbb{P}^N$ avec $N = 9\frac{d}{2} + 1$. Alors l'application des périodes*

$$\mathcal{P} : \mathcal{H}'_d = \tilde{\mathcal{H}'_d}/O(\Lambda_d) \to \mathcal{D}_d/O(\Lambda_d)$$

est $PGL(N)$-invariante et descend au morphisme injectif

$$\mathcal{P} : K'_d = \mathcal{H}'_d//PGL(N) \hookrightarrow \mathcal{D}_d/O(\Lambda_d).$$

Remarque 4.2.15. *L'image du morphisme $\mathcal{P} : K'_d = \mathcal{H}'_d//PGL(N) \hookrightarrow \mathcal{D}_d/O(\Lambda_d)$ est $D^o_d/O(\Lambda_d)$, où $D^o_d = D_d \backslash \Delta_d$ est l'ouvert complémentaire du discriminant $\Delta_d = D_d \cap (\cup_{\delta \in \Lambda_d, \delta^2 = 2} \delta^{\perp})$. Voir par exemple [31].*

4.3 Paires $K3$-Fano

Soit X une variété de Fano de dimension trois et $g = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$. On a $H^0(X, -K_X) = g + 2 > 0$. Donc le fibré ample $-K_X$ est effectif. Si $-K_X$ est très ample, un élément générique S du système linéaire $|-K_X|$ est lisse irréductible par le théorème de Bertini. Il est connu ([71]) que pour toutes les classes de déformations de variétés de Fano de dimension 3, il existe un élément $S \in |-K_X|$ irréductible lisse.

Proposition 4.3.1. *Soit X une variété de Fano de dimension trois et $g = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$. Soit $S \in |-K_X|$ irréductible lisse et $i_S : S \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Alors S est une surface $K3$. De plus, si le groupe abélien $\mathrm{Pic}\,(X) = NS^1(X)$ est muni de la forme quadratique $D_1, D_2 \in \mathrm{Pic}\,(X) \to (D_1 \cdot D_2 \cdot -K_X)$, alors $i_S^* : \mathrm{Pic}\,(X) = NS^1(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\,(S) = NS^1(S)$ est un plongement de réseaux. Ce plongement envoie $-K_X$ sur la classe ample $-K_{X|S} = i_S^*(-K_X) \in \mathrm{Pic}\,(S)$ de degré $-K_{X|S}^2 = 2g - 2$.*

Démonstration. La formule d'adjonction donne $K_S = 0$. Par le théorème de Lefschetz faible, $i_S^* : H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(S, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme et $i_S^* : H^2(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ est un plongement primitif. Donc $H^1(S, \mathbb{Z}) = 0$. Ainsi S est une surface $K3$ et $i_S^* : \mathrm{Pic}\,(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\,(S)$ est injectif.

Puis, la formule de projection pour i_S donne $(D_1 \cdot D_2 \cdot -K_X) = (D_1 \cdot D_2 \cdot S) = (D_{1|S} \cdot D_{2|S}))$ pour $D_1, D_2 \in NS^1(X)$. Le morphisme $i_S^* : \mathrm{Pic}\,(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\,(S)$, respectant donc les formes quadratiques, est un plongement primitif de réseaux. □

Beauville [6] définit le champ algébrique des paires $K3$-Fano.

Définition 4.3.2. *Le foncteur $\mathcal{F}_g : (Var(\mathbb{C}))^o \to \mathrm{Sets}$ associe à une variété algébrique $B \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$ l'ensemble $\mathcal{F}_g(B) = \left\{(f : X \to B, f' : Y \hookrightarrow X \xrightarrow{f} B)\right\} / \sim$, où X est une variété algébrique, $Y \subset X$ une sous-variété fermée et $f : X \to B$ est un morphisme plat, tel que pour tout $b \in B$, X_b est une variété de Fano de dimension 3 et $Y_b \in |-K_{X_b}|$ est une surface $K3$, sur laquelle la polarisation par $-K_{X_b|Y_b}$ est de degré $2g - 2$. Le champ de Beauville s'obtient par la faisceautisation de $\mathcal{F}_g$; on le notera par le même symbole $\mathcal{F}_g$.*

Remarque 4.3.3.
- *Le champ algébrique $\mathcal{F}_g$ est un ouvert du champ $\mathrm{Proj}_{\mathcal{T}_g}(\mathrm{Sym}^\bullet f_*O_{\mathcal{X}}(-K_{\mathcal{X}/\mathcal{T}_g}))$ qui est le fibré projectif au-dessus de $\mathcal{T}_g$, où $f : \mathcal{X} \to \mathcal{T}_g$ est la famille universelle du champ $\mathcal{T}_g$ des variétés de Fano de degré anticanonique $2g - 2$.*
- *Le champ algébrique $\mathcal{F}_g$ n'est pas représentable, car certains objets de ce champ possèdent des automorphismes non triviaux.*

Remarque 4.3.4.
- *On a un morphisme de foncteurs $s_g : \mathcal{F}_g \to \mathcal{K}_{2g-2}$ tel que, pour $B \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$, l'application $s_g(B) : \mathcal{F}_g(B) \to \mathcal{K}_{2g-2}(B)$ est celle de l'oubli de la première composante : $s_g(B) : (f : X \to B, f' : Y \hookrightarrow X \xrightarrow{f} B) \mapsto (f' : Y \to B)$.*
- *On ne peut pas s'attendre, en général, à ce que le morphisme s_g soit surjectif. En effet, si les variétés de Fano de $\mathcal{F}_g$ ont un nombre de Picard supérieur ou égal à deux, les surfaces $K3$ dans l'image de ce morphisme ont alors un nombre de Picard supérieur ou égal à deux, ce qui n'est pas vrai pour une surface $K3$ générale dans K_{2g-2}.*

Par conséquent, Beauville [6] fixe un réseau R muni d'une forme quadratique entière et d'un élément distingué $\rho \in R$, et il considère les champs algébriques suivants :

Définition 4.3.5. *[6] Soit R un réseau muni d'une forme quadratique entière et d'un élément distingué $\rho \in R$ On définit :*
- *Le champ algébrique $\mathcal{K}_{2g-2}^R : (\mathrm{Var}\,(\mathbb{C}))^o \to \mathrm{Sets}$,*

$$B \mapsto \mathcal{K}_{2g-2}^R(B) = \{(f : Y \to B, \mathcal{L}, R_B \hookrightarrow \mathrm{Pic}\,(Y/B))\} / \sim,$$

  où $Y \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$, $f : Y \to B$ est un morphisme plat, tel que pour tout $b \in B$, Y_b est une surface $K3$, $\mathcal{L}_b \in \mathrm{Pic}\,(Y_b)$ est ample de degré $c_1(\mathcal{L}_b) = 2g - 2$, R_B est le système local trivial de réseaux sur B de fibre R, et $R_B \hookrightarrow \mathrm{Pic}\,(Y/B)$ est un plongement primitif qui induit sur chaque fibre un plongement de réseaux $R \hookrightarrow \mathrm{Pic}\,(Y_b)$ respectant la forme quadratique et envoyant ρ sur $\mathcal{L}_b$.

— *Le champ algébrique* $\mathcal{F}_g^R : (\mathrm{Var}\,(\mathbb{C}))^o \to \mathrm{Sets}\,,$

$$B \mapsto \mathcal{F}_g^R(B) = \Big\{(f : X \to B, f' : Y \hookrightarrow X \xrightarrow{f} B, R_B \tilde{\to} \mathrm{Pic}\,(X/B))\Big\} / \sim,$$

où $X \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$ *est une variété algébrique,* $Y \subset X$ *est une sous-variété fermée et* $f : X \to B$ *est un morphisme plat tel que pour tout* $b \in B$*,* X_b *est une variété de Fano de degré anticanonique* $2g-2$*, avec en plus un isomorphisme* $R_B \tilde{\to} \mathrm{Pic}\,(X/B)$ *qui induit sur chaque fibre un isomorphisme de réseaux envoyant* ρ *sur* $-K_{X_b}$*, et* $Y_b \in |-K_{X_b}|$ *est une surface* $K3$ *polarisée par* $(-K_{X_b})_{|Y_b}$ *de degré* $2g-2$*.*

Remarque 4.3.6. *Les sous-champs algébriques* $\mathcal{K}_g^R \subset \mathcal{K}_g$ *et* $\mathcal{F}_g^R \subset \mathcal{F}_g$ *sont donnés par les variétés de Picard relatives des familles universelles* $f' : \mathcal{Y} \to \mathcal{K}_{2g-2}$ *et* $f'' : \mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{T}_g} \mathrm{Proj}_{\mathcal{T}_g}(\mathrm{Sym}^\bullet f_* O_{\mathcal{X}}(-K_{\mathcal{X}/\mathcal{T}_g})) \to \mathcal{F}_g$ *des champ* $\mathcal{K}_{2g-2}$ *et* $\mathcal{F}_g$*.*

On a un morphisme de foncteurs $s_g^R : \mathcal{F}_g^R \to \mathcal{K}_g^R$, défini pour $B \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$ par $(f : X \to B, f' : Y \hookrightarrow X \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{F}_g^R(B) \mapsto (f' : Y \to B) \in \mathcal{K}_{2g-2}^R(B)$. Beauville [6] montre le théorème suivant :

Théorème 4.3.7. *[6] Le morphisme* $s_g^R : \mathcal{F}_g^R \to \mathcal{K}_{2g-2}^R$ *est lisse, donc génériquement surjectif, et, pour* $(X, S) \in \mathcal{F}_g^R(\mathbb{C})$*, la fibre de* s_g^R *contenant* (X, S) *a pour dimension* $\frac{1}{2}b_3(X) = h^{2,1}(X)$*.*

4.4 Variétés symplectiques et fibrations lagrangiennes

Définition 4.4.1. — *Une variété symplectique est une variété algébrique* $X \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$ *normale, telle que son lieu lisse* X_{reg} *possède une structure symplectique, c'est à dire une 2-forme* $\omega \in H^0(X_{\mathrm{reg}}\,, \Omega^2_{X_{\mathrm{reg}}})$ *fermée et partout non dégénérée, c'est à dire, telle que* $d\omega = 0$ *et* $V_{X_{\mathrm{reg}}}(\omega^{\wedge \frac{1}{2}\dim(X)}) = \emptyset$*. La dimension d'une variété symplectique* X*,* $\dim(X) = \dim(T_x X)$ *pour* $x \in X_{\mathrm{reg}}$*, est nécessairement paire et* $K_{X|X_{\mathrm{reg}}}$ *est trivial.*

— *Une sous-variété fermée irréductible* $Y \subset X$ *d'une variété symplectique* X *munie d'une structure symplectique* ω *est lagrangienne si* $\dim(Y) = \frac{1}{2}\dim(X)$*,* $Y_0 = Y_{\mathrm{reg}} \cap X_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ *et* $\omega_{|Y_0} = 0$*. Notons que la non-dégénérescence de* ω_x *en* $x \in Y_0 \subset X_{\mathrm{reg}}$ *implique que* $T_{x_0}Y_0 \subset T_{x_0}X$ *est un sous-espace isotrope maximal (donc de dimension maximale* $\frac{1}{2}\dim(X)$*), où un sous-espace* $W \subset T_{x_0}X$ *est dit isotrope si* $\omega_{x_0|W} = 0$*.*

— *On dit qu'une variété symplectique* X*, munie d'une forme symplectique* $\omega \in H^0(X_{\mathrm{reg}}\,, \Omega^2_{X_{\mathrm{reg}}})$*, possède des singularités symplectiques si* ω *se relève en une 2-forme régulière* $\tilde{\omega} \in H^0(\tilde{X}, \Omega^2_{\tilde{X}})$ *sur une désingularisation* $\tilde{X} \to X$ *de* X*. Notons que la forme* $\tilde{\omega}$ *est alors fermée mais pas nécessairement symplectique et que la forme* ω *se prolonge alors en une 2-forme régulière sur toute autre désingularisation de* X*.*

— *Une variété symplectique irréductible est une variété symplectique complète* X*, simplement connexe, lisse ou à singularités symplectiques de codimension supérieure ou égale à 4 telle que* $\dim H^0(X, \Omega^2_X) = 1$*.*

Remarque 4.4.2. *Une variété complète symplectique* (X, ω) *de dimension* $2n$ *ne peut contenir de sous-variété* $Y \subset X_{\mathrm{reg}}$ *de dimension* $\dim(Y) > n$ *telle que* $\omega_{|Y_{\mathrm{reg}}} = 0$*. En particulier, une variété complète symplectique* X *de dimension* $2n$ *ne peut pas contenir de sous-variété fermée irréductible* Y *rationnelle de dimension strictement plus grande que* n*, telle que* $Y \cap X_{\mathrm{reg}} = Y^0 \neq \emptyset$*.*

Définition 4.4.3. *Un morphisme* $f : X \to B$*, où* X *est une variété symplectique de dimension* $2n$ *et* B *une variété algébrique irréductible de dimension* n*, est une fibration lagrangienne si* f *est surjective et il existe un ouvert* $V \subset B$ *tel que pour* $b \in V$*,* X_b *est une sous-variété lagrangienne de* X*.*

Les surfaces $K3$ sont les variétés symplectiques irréductibles de dimension deux. Les surfaces abéliennes sont aussi des variétés symplectiques de dimension deux.

Beauville (cf [7] et [8]) construit alors deux classes de déformation de variétés symplectiques irréductibles lisses en toute dimension paire $2n$.

— Les schémas de Hilbert $S^{[n]} = \mathrm{Hilb}^{\,n}(S)$ paramétrant les sous-schémas de dimension zéro et de longueur n d'une surface $K3$ S sont des variétés irréductibles symplectiques de dimension $2n$.

— Les variétés de Kummer $K_n(A) = s^{-1}(0) \subset A^{[n+1]}$ sont les fibres du morphisme $s : A^{[n+1]} \to A$ défini par $s(a_1, ..., a_n) = a_1 + ... + a_n$, où A est une surface abélienne et $A^{[n+1]} = \mathrm{Hilb}^{n+1}(A)$ le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas de dimension zéro et de longueur $n+1$ de A. Ce sont des variétés symplectiques irréductibles de dimension $2n$.

Soit $X \in \mathrm{PVar}(\mathbb{C})$ polarisée par $H \in \mathrm{Pic}(X)$. La famille des faisceaux semi-stables sur X pour H, de polynôme de Hilbert P, est bornée. Ainsi, il existe un entier ρ tel que, pour tout faisceau $\mathcal{F}$ semi-stable sur X pour H et $\chi(X, \mathcal{F}(m)) = P(m)\ \forall m \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{reg}(\mathcal{F}) \leq \rho$, où reg désigne la régularité de Castelnuovo-Mumford, c'est à dire le plus petit entier $r > 0$ tel que $H^i(X, \mathcal{F}(r-i)) = 0$ pour tout $i > 0$. Le champ algébrique des faisceaux semi-stables sur X pour H de polynôme de Hilbert P est défini par :

$$B \in \mathrm{Var}(\mathbb{C}) \mapsto \{\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(B \times X) \mid \mathcal{F} \text{ est plat sur } B,\ \mathcal{F}_{X_b} \text{ est semi-stable pour } H \text{ et } \chi(X_b, \mathcal{F}_{|X_b}(m)) = P(m)\ \forall m \in \mathbb{Z}\}.$$

Ce champ algébrique est ainsi représentable par le quotient de Mumford

$$M_X^H(P) = \mathcal{Q}^o // GL(V),$$

où $V = H^0(X, \mathcal{F}(\rho))$ et $\mathcal{Q}^o \subset \mathcal{Q} = \mathrm{Quot}(X, V \otimes O_X(-\rho), P)$ est l'ouvert paramétrant les faisceaux semi-stables (cf. [32, Thm. 3.3.7]).

Remarque 4.4.4. *Notons que $M_X^H(P)$ est un schéma projectif, cf. loc. cit.*

Définition 4.4.5. — *Soit $X \in \mathrm{Var}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Coh}(X)$ le sous-ensemble des faisceaux localement libres. On a un morphisme $\mathrm{ch} : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{CH}^*(X)$ appelé caractère de Chern (cf. [24]).*

— *Soit $X \in \mathrm{SmVar}(\mathbb{C})$. Tout faisceau cohérent admet alors une résolution finie par des faisceaux localement libres. Ainsi, on peut définir, pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, son caractère de Chern $\mathrm{ch}(\mathcal{F}) \in \mathrm{CH}^*(X)$ ou $H^{2*}(X)$ et en particulier, son déterminant*

$$\det(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F}) \in \mathrm{CH}^1(X) = \mathrm{Pic}(X).$$

Soit maintenant $X \in \mathrm{PSmVar}(\mathbb{C})$. On muni l'espace vectoriel de cohomologie paire $H^{2*}(X, \mathbb{Q}) = \sum_{i=0}^n H^{2i}(X, \mathbb{Q})$ de la forme bilinéaire $(v, w) = -\int_X \sum_{i=0}^n (-1)^i v_i \cdot w_{n-i}$.

Définition 4.4.6. *Soit $X \in \mathrm{PSmVar}(\mathbb{C})$. A tout faisceau cohérent $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, on associe un élément de $H^{2*}(X, \mathbb{Q})$ appelé vecteur de Mukai et défini par*

$$v(\mathcal{F}) = \mathrm{ch}(\mathcal{F}) \cdot \mathrm{td}(X)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 4.4.7. *[32] Si on connaît le vecteur de Mukai de $\mathcal{F}$, alors on connaît son polynôme de Hilbert $P(m) = \chi(X, \mathcal{F}(m)) = -(v(\mathcal{F}(m)), v(O_X))$. Par ailleurs, on a un morphisme $\det : M_X^H(P) \to \mathrm{Pic}(X)$, $\mathcal{F} \mapsto \det(\mathcal{F})$.*

Démonstration. La formule de Riemann–Roch–Hizebruch donne, au cas où $\mathcal{F}_1$ est localement libre :

$$\begin{aligned} \chi(X, \mathcal{F}_1^* \otimes \mathcal{F}_2) &= \int_X \mathrm{ch}(\mathcal{F}_1^* \otimes \mathcal{F}_2) \cdot \mathrm{td}(X) \\ &= \int_X \mathrm{ch}(\mathcal{F}_1^*) \cdot \mathrm{td}(X)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{ch}(\mathcal{F}_2) \cdot \mathrm{td}(X)^{\frac{1}{2}} \\ &= -(v(\mathcal{F}_1), v(\mathcal{F}_2)), \end{aligned}$$

car $\mathrm{ch}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \mathrm{ch}(\mathcal{E}) \cdot \mathrm{ch}(\mathcal{F}) \in \mathrm{CH}^*(X)$ ou $H^{2*}(X)$. □

Si maintenant S est une surface $K3$ polarisée par $H \in \mathrm{Pic}(S)$, alors un faisceau cohérent $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(S)$ a pour vecteur de Mukai $v(\mathcal{F}) = (\mathrm{rg}(\mathcal{F}), c_1(\mathcal{F}), c_1(\mathcal{F})^2/2 - c_2(\mathcal{F}) + \mathrm{rg}(\mathcal{F}))$. Pour une surface $K3$, connaître le vecteur de Mukai de $\mathcal{F}$ équivaut à connaître son polynôme de Hilbert P et sa première classe de Chern $c_1(\mathcal{F})$. Par conséquent, l'espace de module des faisceaux semi-stables de vecteur de Mukai fixé $v \in H^{2*}(S)$ est la sous-variété fermée $M_S^H(v) = \det^{-1}(v_1) \subset M_S^H(P)$, où P est le polynôme de Hilbert associé à v. Mukai (cf [48], [49]) montre que l'ouvert $M_S^{H,s}(v) \subset M_S^H(v)$ des faisceaux stables est soit vide, soit lisse de dimension $(v, v) + 2$ (pour une surface $K3$, (v,v) est un entier pair) admettant une structure symplectique donnée par l'accouplement de Yoneda $\alpha : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} H^2(S,O_S) \simeq \mathbb{C}$, avec $T_{\mathcal{F}}(M_S^H(v)) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F} \in M_S^{H,s}(v)$.

On a la proposition suivante (pour plus de précision cf. [32] et [43]) :

Proposition 4.4.8. *Soit S une surface $K3$.*

1. *Si $v \in H^{2*}(S)$ est primitif et $H \in H^2(S,\mathbb{Z})$ est contenu dans une des chambres ouvertes de $H^2(S,\mathbb{R})$ associée à v, alors $M_S^H(v)$ est une variété symplectique irréductible lisse, équivalente par déformations à $S^{[1+\frac{1}{2}(v,v)]}$.*
2. *Avec les même hypothèses sur v, H, soit $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$ et $w = mv$. Alors $M_S^H(w)$ est singulier, et soit $M_S^H(w)$ n'admet pas de résolution symplectique, soit une telle résolution $\widetilde{M_S^H}(w)$ est équivalente par déformations à $S^{[1+\frac{1}{2}(v,v)]}$ ou bien à l'un des deux exemples d'O'Grady.*

Soit S une surface $K3$ et $H \in \mathrm{Pic}\,(S)$ une classe très ample. On a vu (cf. chapitre 5) que $\dim(|H|_S) = g$, où $g = g(C)$ est le genre d'une courbe lisse $C \in |H|$ (ou le genre arithmétique de toutes les courbes $C \in |H|$) du système linéaire. Considérons le vecteur de Mukai $v = (0, H, k+1-g(C))$, $k \in \mathbb{Z}$. Un faisceau $\mathcal{L} \in \mathrm{Coh}\,(S)$ de vecteur de Mukai $v(\mathcal{L}) = v$ est un faisceau de torsion sur S de dimension pure 1 dont le support est une courbe $C_{\mathcal{L}} \in |H|$ et tel que $\chi(S,\mathcal{L}) = v_2(\mathcal{L}) = k+1-g(C)$. Rappelons que le support schématique de $\mathcal{L}$ est le sous-schéma de S défini par l'ideal de Fitting $\mathrm{Fitt}_0(\mathcal{L})$, voir par exemple [66] pour plus de détail sur le support schématique. Dans le cas où $\mathcal{L}$ est inversible sur $C_{\mathcal{L}}$, on a $\chi(S,\mathcal{L}) = \chi(C_{\mathcal{L}},\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}) + 1 - g(C)$ par le théorème de Riemann–Roch pour $C_{\mathcal{L}}$, donc $\deg(\mathcal{L}) = k$. On a la proposition suivante :

Proposition 4.4.9. *Soit S une surface $K3$ polarisée par une classe ample primitive H de degré d, i.e. $S \in K_d$, et contenant une courbe irréductible C de genre arithmétique $p_a(C) = g$, de sorte que $\mathrm{Pic}\,(S)$ contient le réseau $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. Considérons le vecteur de Mukai $v = (0,[C],k+1-g)$, alors :*

(i) la restriction au lieu lisse du morphisme $f : M_S^H(v) \to \mathbb{P}^g$, donné par $\mathcal{L} \in M_S^H(v) \mapsto C'_{\mathcal{L}} = \mathrm{Supp}\,(\mathcal{L}) \in \mathbb{P}^g = \mathbb{P}(H^0(S,O_S(C)))$ est une fibration lagrangienne,

(ii) $M_S^H(0,[C],k+1-g)$ est une variété symplectique irréductible lisse si tous les membres de $|C|_S$ sont réduits et irréductibles.

Démonstration. Le point (i) résulte du fait que la forme symplectique sur le lieu lisse de $M_S^H(v)$, donnée par l'accouplement de Yoneda, s'annule sur les fibres de f par [9]. Le point (ii) résulte du fait que tout faisceau de rang un sur une courbe projective réduite et irréductible est stable. □

La proposition suivante donne une condition nécessaire pour que deux variétés algébriques ayant des singularités isolées en même nombre et de même type soient équivalentes par déformation :

Proposition 4.4.10. *Soient $X, X' \in \mathrm{PVar}\,(\mathbb{C})$ ayant le même nombre de singularités isolées de même type, i.e. $\mathrm{sing}\,(X) = \{s_1,..,s_r\}$ et $\mathrm{sing}\,(X') = \{s'_1,..,s'_r\}$ sont formés de r points isolés aux nombres de Milnor $n_1,..,n_r$. Si il existe $C \in \mathrm{SmVar}\,(\mathbb{C})$ irréductible, $\mathcal{X} \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$ et un morphisme projectif équidimensionnel $f : \mathcal{X} \to C$ tels que la fibre générique $\mathcal{X}_{\eta_C}$ de f est lisse et $X = \mathcal{X}_c$, $X' = \mathcal{X}_{c'}$ pour $c, c' \in C$, alors $\chi(X,\mathbb{Z}) = \chi(X',\mathbb{Z})$, c'est à dire X et X' ont la même caractéristique d'Euler pour la topologie usuelle.*

Démonstration.

D'après [65], il existe des voisinages ouverts $C(c) \subset C$ et $C(c') \subset C$ de c, respectivement de c', tels que les inclusions $i : X \hookrightarrow \mathcal{X}_{C(c)}$ et $i' : X' \hookrightarrow \mathcal{X}_{C(c')}$ admettent des rétractions $r : \mathcal{X}_{C(c)} \to X$, respectivement $r' : \mathcal{X}'_{C(c')} \to X$ avec $i \circ r$ homotope à $I_{\mathcal{X}_{C(c)}}$ et $i' \circ r'$ homotope à $I_{\mathcal{X}_{C'(c')}}$.

Soit $d \in C(c)$, $d' \in C(c')$ tels que $X_d \subset \mathcal{X}$ et $X_{d'} \subset \mathcal{X}$ sont lisses. Puisque $f : \mathcal{X} \backslash f^{-1}(\mathrm{Discr}\,(f)) \to C \backslash \mathrm{Discr}\,(f)$ est un morphisme propre et lisse, $\chi(X_d,\mathbb{Z}) = \chi(X_{d'},\mathbb{Z})$. Les restrictions $r_d : X_d \hookrightarrow \mathcal{X}_{C(c)} \to X$ et $r'_{d'} : X_{d'} \hookrightarrow \mathcal{X}_{C(c')} \to X'$ de r à X_d et de r' à $X_{d'}$ sont des homéomorphismes au-dessus de $X \backslash \mathrm{sing}\, X$, respectivement au-dessus de $X' \backslash \mathrm{sing}\, X'$ et pour $1 \leq i \leq r$, d'après la proposition C.11 et la remarque C.12 (ii) de [65], on a une inclusion $r_d^{-1}(s_i) \hookrightarrow \mathrm{Mil}\,(f,s_i)$ qui est une équivalence homotopique, la fibre de Milnor $\mathrm{Mil}\,(f,s_i)$ ayant le type d'homotopie d'un bouquet de n_i sphères, de même pour $r'_{d'}(s'_i)$. Donc $\chi(X,\mathbb{Z}) = \chi(X_d,\mathbb{Z}) + \sum_i (-1)^n n_i = \chi(X_{d'},\mathbb{Z}) + \sum_i (-1)^n n_i = \chi(X',\mathbb{Z})$, où $n = \dim(X) = \dim(X') = \dim(\mathcal{X}) - 1$.

□

Chapitre 5

Description des systèmes intégrables $K3$-Fano

Sommaire

5.1 Systèmes intégrables $K3$-Fano et plan de travail

Soit R un réseau de Picard d'une variété de Fano de genre g. Il contient un élément distingué $\rho = -K_X$. Par abus de notation, nous omettrons la mention de ρ, en écrivant juste R au lieu de (R, ρ).

On a vu que le morphisme de champs algébriques $s_g : \mathcal{F}_g^R \to \mathcal{K}_{2g-2}^R$ est génériquement surjectif. Soit $[S] \in \mathcal{K}_{2g-2}^R(\mathbb{C})$ une surface $K3$ munie d'un plongement primitif $R \hookrightarrow \operatorname{Pic}(S)$. La fibre au-dessus de $[S]$ est le sous-champ

$$\mathcal{F}_S^R = s_g^{-1}([S]) : B \mapsto \{f : X \to B,\ S \times B \hookrightarrow X \to B,\ S \in |-K_{X_b}|,\ \forall b \in B\} / \sim$$

des variétés de Fano contenant S en tant que diviseur anticanonique. Le morphisme $i_S : S \times B \hookrightarrow X$ est un plongement fermé relatif sur B de variétés polarisées par le réseau R. Le pullback via i_S envoie le réseau de Picard de X_b pour $b \in B$ sur le sous-réseau $i_S^* Pic(X_b) = R \subset \mathrm{Pic}\,(S)$ de S. Les $\mathbb{C}$-points de ce sous-champ sont les classes d'isomorphisme de variétés de Fano relativement aux isomorphismes $\phi : X \xrightarrow{\sim} X'$ qui induisent l'identité sur R. Un tel isomorphisme prolonge un automorphisme $\phi|_S$ de S. Si S est générique dans K_{2g-2}^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S) \simeq R$ et $\phi|_S$ induit l'identité sur $\mathrm{Pic}\,(S)$, ce qui entraîne, dans la grande majorité des cas, que $\phi|_S$ fixe S point par point. Remarquons que lorsqu'il y a plusieurs choix possibles d'un élément marqué ρ de R, le champ $\mathcal{F}_S^R$ en dépend fortement. Par exemple, si S est une surface K3 obtenue comme une intersection d'une cubique et d'une quadrique de $\mathbb{P}^4$, alors $R = \mathbb{Z}H$ est engendré par la section hyperplane de $\mathbb{P}^4$, et $\mathcal{F}_S^R$ paramètre les quadriques, les cubiques ou les intersections X_6 d'une cubique et d'une quadrique de $\mathbb{P}^5$ contenant S selon que $\rho = 3H$, $2H$ ou H. La dépendance de $K^R = K_{2g-2}^R$ est moins importante. L'indice inférieur $2g-2$ précise la self-intersection de ρ et pourra être omise. Dans l'exemple considéré K^R ne dépend point de ρ. Dans les cas où rg $R > 1$ l'espace de modules K^R forme l'ouvert de l'espace de modules des surfaces $K3$ polarisées par le même réseau sans élément marqué, qui paramètre les surfaces, sur lesquelles ρ est ample.

Définition 5.1.1. *Les jacobiennes intermédiaires d'une variété projective lisse $X \in \mathrm{PSmVar}\,(\mathbb{C})$ de dimension n sont les tores complexes*

$$J^{2k-1}(X) = H^{2k-1}(X, \mathbb{C})/(F^k H^{2k-1}(X) \oplus H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})).$$

Soient $X, B \in \mathrm{Var}\,(\mathbb{C})$ et $f : X \to B$ un morphisme projectif lisse. Les faisceaux $R^j f_* \mathbb{Z}$, $R^j f_* \mathbb{Q}$ et $R^j f_* \mathbb{C}$ sont des systèmes locaux sur B, que l'on note $H_{\mathbb{Z}}$, $H_{\mathbb{Q}}$ et $H_{\mathbb{C}}$ respectivement. Le faisceau localement libre $\mathcal{H}^j = O_B \otimes R^j f_* \mathbb{C}$ est isomorphe au faisceau $R^j f_*(\Omega^{\cdot}_{X/B})$. Les sous-faisceaux $\mathcal{F}^p \mathcal{H}^j = R^j f_*(\Omega^{\cdot \geq p}_{X/B}) \subset R^j f_*(\Omega^{\cdot}_{X/B}) = \mathcal{H}^j$ sont des fibrés vectoriels algébriques sur B. La jacobienne intermédiaire relative est définie par

$$J^{2k-1}(X/B) = \mathcal{H}^{2k-1}/(\mathcal{F}^k \mathcal{H}^{2k-1} \oplus H_{\mathbb{Z}}).$$

C'est une fibration en tores complexes.

La jacobienne intermédiaire d'une variété de Fano de dimension trois est donc le tore complexe $J^3(X) = H^{1,2}(X)/H^3(X, \mathbb{Z})$.

Le théorème suivant constitue le résultat principal de l'article de Markushevich [43].

Théorème 5.1.2. *[43] La jacobienne intermédiaire relative $h : \mathcal{J}(\mathcal{X}/\mathcal{F}_S^R) \to \mathcal{F}_S^R$ de la famille universelle $f : \mathcal{X} \to \mathcal{F}_S^R$ des variétés de Fano contenant S en tant que diviseur anticanonique est une fibration lagrangienne.*

Plan de travail

La classification des variétés de Fano de dimension 3 donne 105 familles complètes $f_i : X_i \to K_i$, $K_i, X_i \in \mathrm{PVar}\,(\mathbb{C})$, $i \in \{1, \ldots, 105\}$, dont une fibre générale est une variété de Fano. Les variétés de Fano de réseau de Picard R_i sont ainsi représentées par un ouvert $K_i^o \subset K_i$, au-dessus duquel f_i est lisse, pour $i \in \{1, \ldots, 105\}$, c'est à dire qu'on a pour $i \in \{1, \ldots, 105\}$ des morphismes surjectifs de champs algébriques $[K_i^o] \to \mathcal{T}_g^i$, où $[K_i^o]$ est le champ algébrique représenté par la variété algébrique K_i^o et $\mathcal{T}_g^i$ est une des 105 composantes connexes du champ algébrique $\mathcal{T} = \sqcup_{i=1}^{105} \mathcal{T}_g^i$ des variétés de Fano.

Pour chaque i-ième famille de variétés de Fano, on fixe une surface $K3$ contenue dans une variété de Fano de cette famille en tant que diviseur anticanonique, i.e. $S_i \in |-K_{X_{it}}|$ lisse irréductible pour un certain $t \in K_i^o$. On a vu, au chapitre 4, que $i_{S_i}^* : \mathrm{Pic}\,(X_{it}) = R_i \hookrightarrow \mathrm{Pic}\,(S_i)$ est un plongement primitif de réseaux. On donnera une base et la matrice de la forme d'intersection de ce réseau $R_i \subset \mathrm{Pic}\,(S_i)$. La surface $K3$ S_i appartient à l'espace de module $\mathcal{K}_{2g-2}^{R_i}$. On mettra en évidence la généricité, d'après le théorème 4.3.7 ([6]), des surfaces $K3$ obtenues de la sorte (comme diviseur anticanonique d'une variété de Fano X_{it}) dans l'espace de modules $\mathcal{K}_{2g-2}^{R_i}$.

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, 105\}$, on fixe $S_i \in |-K_{X_{it}}|$, générique dans $\mathcal{K}_{2g-2}^{R_i}$, et on étudiera la représentabilité du champ algébrique

$$\mathcal{F}_{2g-2}^{S_i} : B \to \{f : X_{iB} \to B,\ i_{S_i} : S_i \times B \hookrightarrow X_{iB} \text{ sur } B,\ S_i \in |-K_{X_{it}}|\} / \sim,$$

le morphisme $i_{S_i} : S_i \times B \hookrightarrow X_{iB} \to B$ étant un plongement relatif sur B de familles polarisées par R_i. On considérera la sous-variété $K_{i,S_i} \subset K_i$ des $t \in K_i$ tels que $S_i \subset X_{it}$ et l'ouvert $B_i := K_{i,S_i} \cap K_i^o$ de K_{i,S_i} paramétrant les fibres qui sont des variétés de Fano. On obtient la famille

$$S_i \times B_i \subset X_{i,B_i} \to B_i,$$

qui représente toutes les extensions de Fano de S_i. Le champ $\mathcal{F}_{2g-2}^{S_i} = [B_i/G]$ est alors le champ quotient de la variété algébrique B_i par le groupe des isomorphismes des variétés de Fano de B_i fixant R_i. Si ce groupe est trivial, B_i est l'espace de modules de ce champ. Dans le cas où le groupe est non trivial, les questions se posent si le champ est représentable, s'il possède un espace de modules grossier dans la catégorie des schémas et si l'existence de la forme symplectique sur le champ est une propriété plus forte que celle sur l'espace de modules grossier. La question la plus intrigante est si la jacobienne intermédiaire relative $h : \mathcal{J}(X_{B_i}/B_i) \to B_i$, qui est une fibration lagrangienne par théorème 5.1.2, admet une compactification symplectique lisse ou normale à singularités symplectiques. Nous étudierons ces questions dans certains cas.

Notre intérêt principal étant l'étude des fibrations lagrangiennes de jacobiennes intermédiaires relatives, seules les familles dont les variétés de Fano ont $h^{2,1} > 0$, i.e. dont la jacobienne intermédiaire est non-nulle, seront considérées. En effet si $h^{2,1} = 0$, l'espace de modules $\mathcal{F}_{2g-2}^{S_i}$ est de dimension zéro. Il y n'a ainsi que 51 familles à étudier.

On étudiera d'abord dans la section 5.2 les familles de variétés de Fano de nombre de Picard 1. Le cas des intersections complètes de 2 quadriques dans $\mathbb{P}^5$ est connu. La section 5.3 sera consacrée aux familles de variétés de Fano de nombre de Picard supérieur ou égal à 2 classifiées par Mori et Mukai. On distinguera dans cette section les cas suivants :

— Pour les familles dont les variétés de Fano $X_{it} = \widetilde{Y_{jt}}_{C_t}$ sont les éclatés de $Y_{jt} = \mathbb{P}^3$ en une courbe C_t, ou de variétés de Fano Y_{jt} d'une autre famille en une courbe C_t tel que $J(Y_{jt}) = 0$, alors $J(X_{it}) = J(C_t)$ et on montre que la jacobienne intermédiaire relative $h : \mathcal{J}(X_{B_i}/B_i) \to B_i$ admet une compactification symplectique du type $h : M_{S_i}(v_i) \to K_{i,S_i}$ ou $h : M_{S_i}(v_i) \sqcup M_{S_i}(v_i') \to K_{i,S_i}$, $M_{S_i}(v_i)$ étant un espace de modules de faisceaux de torsion sur la surface $K3$ S_i. Il y a 16 familles de ce type (cf. propositions 5.3.2 à 5.3.19).

— Dans la même situation, si les variétés de Fano $\widetilde{Y_{jt}}$ ont une jacobienne intermédiaire non nulle, on montre que que la question de l'existence d'une compactification symplectique de $h : \mathcal{J}(X_{B_i}/B_i) \to B_i$ se ramène à celle de $h : \mathcal{J}(Y_{B_j}/B_j) \to B_j$. Il y a 7 familles de ce type (cf. propositions 5.3.26, 5.3.28, 5.3.41, 5.3.42).

— Pour les familles dont les variétés de Fano $X_{it} \to \mathbb{P}^1 \times Y$ sont des revêtements doubles de $\mathbb{P}^1 \times Y$, ramifiés en un diviseur R_t d'un système linéaire de type $|p_1^*O(2) \times p_2^*\mathcal{L}|$, où Y est une surface projective lisse, les variétés $X_{it} \to Y$ sont des fibrés en coniques au-dessus de la surface projective lisse Y et $J(X_{it}) = \mathrm{Pr}\,(\tilde{C}_t/C_t)$, où $C_b \subset Y$ est le discriminant du fibré en coniques $X_{ib} \to Y$. Il y a 7 familles de ce type.
Dans le cas où le revêtement double $\tilde{C}_t \to C_t$ est trivial, $J(X_{it}) = J(C_t)$ et $C_t \subset S_i$. La jacobienne intermédiaire relative admet dans ce cas une compactification symplectique qui est encore un espace de modules de faisceaux sur S_i (cf. propositions 5.3.22, 5.3.24).
Dans le cas où les variétés de Fano sont les revêtements doubles $X_{it} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ ($Y = \mathbb{P}^2$) ramifié en un diviseur R_t de type $(2,2)$, on étudie, dans la section 5.4, une compactification $\overline{\mathcal{P}}(\tilde{C}_{K_{i,S_i}}/C_{K_{i,S_i}}) \to K_{i,S_i} = \mathbb{P}^2$ de la jacobienne intermédiaire relative $h : \mathcal{J}(X_{B_i}/B_i) \to B_i$. La famille de courbes $C_{K_{i,S_i}} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ est ici une famille de quartiques de $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas un système linéaire.

— Enfin il reste à déterminer la jacobienne intermédiaire de la famille 8 de nombre de Picard 2.

On obtient le théorème suivant. On énumère les cas où la jacobienne intermédiaire est non nulle et l'espace de modules $\mathcal{F}_S^R$ est assez simple : un ouvert de $\mathbb{P}^N$, ou d'un produit ou d'une réunion de $\mathbb{P}^N$. On note par ρ le nombre de Picard de la variété de Fano. Pour les variétés de Fano à $\rho = 1$, on se sert de la notation X_g, où g est le genre de la variété dans le cas où elle est d'indice 1, et de la notation V_k en cas d'indice 2, où $k = H^3$, $H = \frac{1}{2}(-K_V)$. Pour les variétés de Fano à $\rho \geq 2$, on fait référence au numéro de la variété de Fano dans les tables de la classification de Mori–Mukai, qui est aussi reprise dans les tableaux de l'Appendice. Les trois premiers points du théorème ramassent les cas où on produit une compactification de la jacobienne intermédiaire relative en utilisant le système intégrable de Beauville-Mukai sur une surface $K3$. La question de la compactification symplectique de la jacobienne intermédiaire relative n'est pas étudiée pour les variétés du point (iv), ainsi que pour les variétés non présentées dans ce théorème parce que leurs espaces de modules $\mathcal{F}_S^R$ sont des champs que l'on ne peut pas identifier à un ouvert de $\mathbb{P}^N$, ni d'un produit, ni d'une réunion de $\mathbb{P}^N$. Pour un des cas du point (iv), notamment, la famille no. 18 avec $\rho = 2$, on étudie une compactification partielle de la famille lagrangienne dans la section 5.4.

Théorème 5.1.3. *(i) Pour les 19 familles : no. 4, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 17, 23, 25, 28 du cas $\rho = 2$, no. 3, 6, 7, 9, 11, 14 du cas $\rho = 3$, et no. 1, 2 du cas $\rho = 4$, la famille universelle $f : \mathcal{X} \to \mathcal{F}_S^R$ est paramétrée par un ouvert $\mathcal{F}_S^R = B$ de $\mathbb{P}^N$ ou de $\mathbb{P}^N \sqcup \mathbb{P}^N$, et la jacobienne intermédiaire relative $J = J(\mathcal{X}/B) \to B$ admet une compactification symplectique $h : \overline{J} = M_S(v) \to \mathbb{P}^N$, respectivement $h : \overline{J} = M_S(v) \sqcup M_S(v') \to \mathbb{P}^N \sqcup \mathbb{P}^N$, où $M_S(v)$ désigne l'espace de module de faisceaux de torsion semi-stables de vecteur de Mukai v sur S et $h(\mathcal{F}) = \operatorname{Supp} \mathcal{F}$.*

(ii) Pour les variétés V_4, ainsi que no. 16 et 19 du cas $\rho = 2$, l'espace de modules $\mathcal{F}_S^R$ est un ouvert de $\mathbb{P}^2$ et la jacobienne intermédiaire relative admet une compactification symplectique, qui est un système intégrable de Beauville-Mukai $\overline{\mathcal{J}_{4,S}} := M_{\hat{S}}(0, |H|, 1 - g) \to \mathbb{P}^2$ sur une surface K3, génériquement différente de S.

(iii) Pour la famille no. 10 du cas $\rho = 2$, $\mathcal{F}_S^R$ est un ouvert de $\mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1)$ et $\overline{\mathcal{J}_{4,S}} \times (M_{\hat{S}}(v) \sqcup M_{\hat{S}}(v')) \to \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1)$ est une compactification symplectique de la jacobienne intermédiaire relative liée à une surface K3 différente de S.

(iv) Dans les cas restants, la jacobienne intermédiaire est non triviale et l'espace de modules $\mathcal{F}_S^R$ est un ouvert de $\mathbb{P}^N$ ou de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N$ seulement si les variétés de Fano appartiennent à une des familles suivantes : X_g ($7 \leq g \leq 10$), V_1, V_3, no. 5, 6, 11, 18 du cas $\rho = 2$, ou no. 2, 4 du cas $\rho = 3$.

La plupart des variétés de Fano de dimension trois classifiées par Mori–Mukai [45] et Iskovskikh [33] sont des intersections complètes de quadriques et de cubiques, des quartiques, des éclatés de ces intersections complètes, des fibrés en coniques, ou des éclatés de ces fibrés en coniques.

On utilisera les propositions suivantes :

Proposition 5.1.4. *Si $X = V(f_1, \ldots, f_r) = V(I_X) \subset \mathbb{P}^N$ est une intersection complète, alors pour tout $d \in \mathbb{N}$ le morphisme $i_X^* : H^0(\mathbb{P}^N, O(d)) \to H^0(X, O_X(d))$ est surjectif, où $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ est le plongement fermé. En particulier, X est projectivement normale si et seulement si X est normale.*

Démonstration. C'est classique. On utilise la résolution de Koszul du faisceau $\widetilde{I_X} \subset O_{\mathbb{P}^N}$. □

Proposition 5.1.5. *(i) Si $X = V(f_1, \ldots, f_r) \subset \mathbb{P}^N$ est une intersection complète telle que $\dim(X) \geq 3$, alors $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ et $H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[H]$. De plus, si X est lisse, $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}[H]$.*

(ii) Si $X = V(f_1, \ldots, f_r) \subset \mathbb{P}^N$ et $X' = V(f'_1, \ldots, f'_r) \subset \mathbb{P}^N$ sont deux intersections complètes lisses de dimension ≥ 3 isomorphes par un isomorphisme $\phi : X \xrightarrow{\sim} X'$. Alors ϕ se relève en un automorphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{P}^N \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^N$.

Donc deux intersections complètes lisses $X \subset \mathbb{P}^N$ et $X' \subset \mathbb{P}^N$ sont isomorphes si et seulement si il existe $\tilde{\phi} \in PGL(N)$ tel que $\tilde{\phi}(X) = X'$, en particulier elles sont données par des équations de même degré.

Démonstration.
(i) : Soit X une intersection complète de $\mathbb{P}^N$. Notons $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ l'immersion fermée. Le théorème de Lefschetz, pour les sections hyperplanes d'une variété projective dont le complémentaire est lisse, dit que $i_X^* : H^1(\mathbb{P}^N, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Z})$ et $i_X^* : H^2(\mathbb{P}^N, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Z})$ sont des isomorphismes. Donc $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ et $H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[H]$, où $H = X \cap \Lambda \subset X \subset \mathbb{P}^N$ est une section hyperplane. Si X est lisse, $\operatorname{Pic}^0(X) = 0$ car $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$. Donc $cl : \operatorname{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme et $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}[H]$.
(ii) : Ce point se déduit du point (i). En effet, notons $H = O_X(1) = O_{\mathbb{P}^N}(1)_{|X}$ et $H' = O_{X'}(1) = O_{\mathbb{P}^N}(1)_{|X'}$. Par le point (i), $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}[H]$ et $\operatorname{Pic}(X') = \mathbb{Z}[H']$. Un isomorphisme $\phi : X \xrightarrow{\sim} X'$ envoie donc H sur H', i.e. $\phi^* H = H'$. Le morphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{P}(H^0(X', O'_X(1)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(H^0(X, \phi^* O_{X'}(1))$, donné par les systèmes linéaires complets très amples $|H|$ et $|H'|$, prolonge $\phi : X \xrightarrow{\sim} X'$. Comme X et X' sont projectivement normales, $\tilde{\phi} : \mathbb{P}(H^0(X', O'_X(1)) = \mathbb{P}^N \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(H^0(X, \phi^* O_{X'}(1)) = \mathbb{P}^N$ est un automorphisme de $\mathbb{P}^N$.
□

La proposition suivante concerne les surfaces $K3$ contenues en tant que diviseur anticanonique dans les variétés de Fano de dimension trois qui sont des éclatés d'autres variétés de Fano.

Proposition 5.1.6. *Soit $\tilde{X}_C$ l'éclaté d'une variété de Fano de dimension trois X et d'indice r en une courbe irréductible $C \in X$. Notons $\epsilon : \tilde{X}_C \to X$ le morphisme d'éclatement et $E \subset \tilde{X}_C$ le diviseur exceptionnel. On a alors*

(i) $K_{\tilde{X}_C} = \epsilon^* K_X + E = -rH + E$.

(ii) Soit $S \in |-K_{\tilde{X}_C}| = |rH - E|$ irréductible. Notons $S_0 = \epsilon(S) \subset X$. Alors $C \subset S_0$ et $S \subset \tilde{X}_C$ est le transformé strict de S_0. De plus, si $S_0 \subset X$ est lisse, ϵ induit un isomorphisme $\epsilon : S \xrightarrow{\sim} S_0$.

(iii) Réciproquement, si $S_0 \subset X$ est une surface $K3$ membre du système linéaire $|-K_X|$ contenant C, alors $\epsilon^{-1}(S_0) = S \cup E \subset \tilde{X}_C$ et le transformé strict S est une surface $K3$ isomorphe à S_0, ϵ induisant un isomorphisme $\epsilon : S \xrightarrow{\sim} S_0$. De plus, $S \in |-K_{\tilde{X}_C}|$.

Démonstration.
(i) : C'est classique.
(ii) : Pour $S \in |-K_{\tilde{X}_C}|$ et $S_0 = \epsilon(S) \subset X$, on a $[S_0] = \epsilon_*[S] = rH \in \mathrm{Pic}\,(X)$. Si C n'était pas contenue dans S_0, $\epsilon^{-1}(S_0) \subset \tilde{X}_C$ serait irréductible et on aurait donc $S = \epsilon^{-1}(S_0)$. Ceci entraînerait $[S] = [\epsilon^{-1}(S_0)] = \epsilon^*[S_0] = rH \in \mathrm{Pic}\,(\tilde{X}_C)$, ce qui est une contradiction. Donc $C \subset S_0$, $\epsilon^{-1}(S_0) = S \cup E$ et S est le transformé strict de S_0. Par ailleurs, si $S_0 \subset X$ est une surface contenant C et S est le transformé strict, la restriction $\epsilon : S \to S_0$ de ϵ à S est l'éclaté de S_0 en C. Si S_0 est lisse, $C \subset S_0$ est un diviseur de Cartier de S_0, donc $\epsilon : S \xrightarrow{\sim} S_0$ est un isomorphisme.
(iii) : Clair.

□

Lemme 5.1.7. *Soient $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété projective et $C \subset X$ une courbe. Il existe un entier positif r, tel que pour toute variété projective $X' \in \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^n}(O_{\mathbb{P}^n}, P_X)$ et toute courbe $C' \in \mathrm{Quot}_{X'}(O_{X'}, P_C)$ l'éclaté $\tilde{X}'_{C'}$ de X' en C' se plonge dans $X' \times \mathbb{P}^r$ de manière relative.*

Démonstration. On note $\mathcal{X} \subset \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^n}(O_{\mathbb{P}^n}, P_X) \times \mathbb{P}^n$ et $\mathcal{C} \subset \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^n}(O_{\mathbb{P}^n}, P_C) \times \mathcal{X}$ les correspondances d'incidences. L'éclatement étant un morphisme projectif, il existe un entier positif r tel qu'on ait le plongement suivant

$$\widetilde{(\mathcal{X} \times \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^n}(O_{\mathbb{P}^n}, P_C))}_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{X} \times \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^n}(O_{\mathbb{P}^n}, P_C) \times \mathbb{P}^r.$$

□

Proposition 5.1.8. *(i) Soit $X \in \mathrm{PSmVar}\,(\mathbb{C})$ et $Z \subset X$ une sous-variété fermée lisse. Alors on a un isomorphisme $\mathrm{Def}\,(X, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}\,(\tilde{X}_Z)$, où $\mathrm{Def}\,(X, Z)$ désigne le foncteur des déformations de la paire (X, Z) et $\mathrm{Def}\,(\tilde{X}_Z)$ le foncteur des déformations de $\tilde{X}_Z$.*

(ii) Les déformations infinitésimales de (X, Z) sont paramétrées par $T_{(X,Z)}\,\mathrm{Def}\,(X, Z) = H^1(X, \mathcal{T}_X\langle Z\rangle)$, où $\mathcal{T}_X\langle Z\rangle$ désigne le sous-faisceau de $\mathcal{T}_X$ formé des germes de champs de vecteurs laissant invariant l'idéal de Z, et les déformations de $\tilde{X}_Z$ sont paramétrées par $T_{\tilde{X}_Z}\,\mathrm{Def}\,(\tilde{X}_Z) = H^1(\tilde{X}_Z, \mathcal{T}_{\tilde{X}_Z})$.

(iii) Soient X est une variété de Fano au nombre de Betti b_3 nul et $Z \subset X$ une sous-variété fermée lisse. Alors

$$H^1(X, \mathcal{T}_X\langle Z\rangle) = H^0(Z, \mathcal{N}_{Z/X}))/\alpha(H^0(X, \mathcal{T}_X)),$$

où α est le morphisme de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{T}_X\langle Z\rangle \to \mathcal{T}_X \to \mathcal{N}_{Z/X} \to 0.$$

Démonstration. (i) L'isomorphisme $\mathrm{Def}\,(X, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}\,(\tilde{X}_Z)$ suit du travail de Kodaira [40].
(ii) L'isomorphisme $T_{(X,Z)}\,\mathrm{Def}\,(X, Z) = H^1(X, \mathcal{T}_X\langle Z\rangle)$ est démontré par Beauville [6].
(iii) C'est une conséquence immédiate du fait que $h^1(X, \mathcal{T}_X) = h^{2,1}(X) = \frac{1}{2}b_3(X) = 0$. □

Soit S une surface $K3$ dans l'espace de modules K_6 des surfaces $K3$ polarisées de degré 6 ne contenant pas de courbes rationnelles lisses et qui n'est pas un revêtement double d'une surface cubique réglée de $\mathbb{P}^4$ ou d'un cône au-dessus d'une cubique gauche lisse de $\mathbb{P}^3$. S est polarisée par une classe ample H de degré 6. Le système linéaire complet $|H|_S$ est de dimension 4. Les composantes fixes $\Delta_i \subset S$ d'un système linéaire sur une surface $K3$ sont des courbes rationnelles lisses car $p_a(\Delta_i) = \dim\,|\Delta_i|_S = 0$. Le système linéaire complet $|H|_S$ est donc sans composantes fixes donc sans point de base d'après Saint-Donat, [68] corollaire 3.2. Il donne ainsi un morphisme fini $\phi_H : S \to \mathbb{P}^4$.

Comme $\phi_H(S) \subset \mathbb{P}^4$ n'est pas contenu dans un hyperplan, ϕ_H est soit birationnel, soit hyperelliptique. D'après le théorème 5.2 et la proposition 5.7 de Saint-Donat [68], si ϕ est hyperelliptique, alors $\phi_H(S) \subset \mathbb{P}^4$ est une surface cubique réglée de $\mathbb{P}^4$ ou un cône au-dessus d'une cubique gauche de $\mathbb{P}^3$. En effet, puisque $H^2 = 6$, il n'existe pas de courbe irréductible $C \subset S$, telle que $2C \sim H$ dans S. Le théorème 6.1 de [68] montre que, si ϕ_H est birationnel, alors ϕ_H est un plongement, i.e. la classe H est très ample.

Lemme 5.1.9. *Soit X une variété projective et $|L|_X$ un système linéaire complet. Notons $\phi_L : X \to \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(H^0(X,L))$ le morphisme correspondant. Soit $D \in |L|_X$, $D = \phi_L^{-1}(H) \subset X$ où $H \subset \mathbb{P}^N$ est un hyperplan. Supposons que $\phi_L(X) \subset \mathbb{P}^N$ ne soit pas contenue dans un hyperplan. Alors, $\phi_L^* : H^0(\mathbb{P}^N, O(1)) \xrightarrow{\sim} H^0(X,L)$ et donc $S^kH^0(X,L) = H^0(\mathbb{P}^N, O(k))$. Si, pour les entiers naturels k et $k-1$, le morphisme $u_k : S^kH^0(X,L) \to H^0(X,L^k)$ est surjectif (en particulier, si L est très ample et X projectivement normale, c'est à dire ces morphismes sont surjectifs pour tout k) alors, pour toute hypersurface $f_H \in H^0(H, O(k))$ de degré k de H qui contient $\phi_L(D) \subset H$, il existe une hypersurface $f \in H^0(\mathbb{P}^N, O(k))$ qui contient $\phi_L(X) \subset \mathbb{P}^N$ de degré k telle que $f_H = f_{|H}$.*

Démonstration.
On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^N, I_{\phi_L(X)}(k)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(H, I_{\phi_L(D)}(k)) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^N, O(k-1)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^N, O(k)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(H, O(k)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(X, L^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, L^k) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(D, L^k_{|D}) & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On déduit par une chasse au diagramme la surjectivité de $H^0(\mathbb{P}^N, I_{\phi_L(X)}(k)) \to H^0(H, I_{\phi_L(D)}(k))$.

□

On déduit de ce lemme la proposition suivante :

Proposition 5.1.10. *Soit S une surface $K3$ dans K_6, c'est à dire polarisée par une classe ample H de degré $H^2 = 6$. Si la classe H est très ample, alors le morphisme $\phi_H : S \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ donné par le système linéaire complet $|H|_S$ plonge S comme une intersection complète d'une quadrique et d'une cubique de $\mathbb{P}^4$, i.e. $\phi_H(S) = V_{\mathbb{P}^4}(f_3, q)$.*

Démonstration.
Soit $C \in |H|_S$ une courbe lisse, $C = H \cap S \subset \mathbb{P}^4$ est une courbe canonique de genre 4 (de degré 6). Toute courbe canonique de degré 6 est une intersection complète d'une quadrique $q_H \in H^0(H, O(2))$ et d'une cubique $f_{3,H} \in H^0(H, O(3))$. Donc $C = V(q_H, f_{3,H}) \subset H$. D'après le lemme ci-dessus et le théorème 6.1 de [68] (le système linéaire H est très ample projectivement normal) les morphismes $H^0(\mathbb{P}^4, I_S(2)) \to H^0(H, I_C(2))$ et $H^0(\mathbb{P}^4, I_S(3)) \to H^0(H, I_C(3))$ sont surjectifs. Donc il existe une quadrique $q \in H^0(\mathbb{P}^4, O(2))$ et une cubique $f_3 \in H^0(\mathbb{P}^4, O(3))$, telles que $S \subset V(q) \cap V(f_3) = V_{\mathbb{P}^4}(q, f_3)$. Puisque la quadrique q_H n'est pas contenue dans la cubique $f_{3,H}$, la quadrique q n'est pas contenue dans la cubique f_3 donc $V_{\mathbb{P}^4}(q, f_3)$ est bien une intersection complète (c'est une surface). Enfin, puisque S est une surface de degré 6, on a $S = V_{\mathbb{P}^4}(q, f_3)$. □

La proposition suivante met en évidence, dans des cas où les variétés de Fano sont les éclatés d'autres variétés de Fano en une courbe C d'un certain type, la généricité des surfaces $K3$ obtenues comme diviseur anticanonique de ces variétés de Fano dans leurs espaces de modules K^R_{2g-2} :

Proposition 5.1.11. *Soit $C \subset \mathbb{P}^N$ une courbe connexe de degré d, tel que $\langle C\rangle = \mathbb{P}^N$. Alors $N \leq d+1-p_a(C)$.*

Démonstration. Le théorème de Riemann-Roch donne $\chi(C, O_C(1)) = d+1-p_a(C)$. On a par ailleurs $\chi(C, O_C(1)) = \dim H^0(C, O_C(1)) \geq N$. D'où le résultat. □

Dans la suite de ce chapitre, on s'intéresse d'abord au cas des variétés de nombre de Picard 1. En effet, on ne voit pas de compactification naturelle dans ce cas, cependant, on regardera si le champ algébrique est représentable (resp. coreprésentable) et on donnera une description de l'espace de modules (resp. espace de modules grossier) de ce champ. Ensuite, on s'intéressera aux classes de déformation des variétés de Fano dont le nombre de Picard est supérieur ou égal à 2, classifiées par Mori et Mukai.

5.2 Variétés de Fano de nombre de Picard 1

Dans ce paragraphe on s'intéresse au cas où les variétés de Fano ont le nombre de Picard égal à 1 et l'indice $r \in \{1,2,3,4\}$.

5.2.1 Variétés de Fano d'indice $r = 1$

Soit S une surface K3 de degré $2g-2$ telle qu'il existe une variété de Fano X_t de dimension 3 de nombre de Picard 1 et d'indice 1 contenant S en tant qu'un diviseur anticanonique. Le réseau de Picard est $\mathbb{Z}H$ avec l'élément marqué $\rho = H$ tel que $(H)^2 = (H \cdot H \cdot \rho)_X = 2g-2$. On dénote par $\mathcal{F}_S^R$ le champ de modules de Beauville qui paramètre de telles variétés de Fano et par $f : \mathcal{X} \to \mathcal{F}_S^R$ la famille universelle de sorte que la jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}f : \mathcal{J}(\mathcal{X}/\mathcal{F}_S^R) \to \mathcal{F}_S^R$ est une famille lagrangienne.

Remarque 5.2.1. *Lorsque les variétés de Fano sont de nombre de Picard 1 et d'indice 1 et $2 \leq g \leq 10$, la jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}f : \mathcal{J}(\mathcal{X}/\mathcal{F}_S^R) \to \mathcal{F}_S^R$ de la famille universelle $f : \mathcal{X} \to \mathcal{F}_S^R$ du champ $\mathcal{F}_S^R$ a été étudiée par Iliev et Manivel ([34]). Ils montrent que c'est localement une fibration lagrangienne, plus précisément que pour $b \in \mathcal{F}_S^R$ et $\mathcal{H}_S := \mathrm{Def}\,(X_b, S) \to \mathcal{F}_S^R$, la jacobienne intermédiaire relative $f_{\mathcal{H}_S} : \mathcal{X}_{\mathcal{H}_S} \to \mathcal{H}_S$ est une fibration lagrangienne (proposition 9).*

Il existe pour chaque g un espace affine $\mathbb{A}^N$ de dimension N tel que toutes les variétés de Fano $X_t = V(I_t) \subset \mathbb{P}^n$(resp. $X_t \xrightarrow{1:2} \mathbb{P}^3$ pour $g=2$) contenant $S \subset \mathbb{P}^{n-1}$ (resp. $S \xrightarrow{1:2} \mathbb{P}^2$ pour $g=2$) sont représentées par un point $t \in \mathbb{A}^N$. Le champ $\mathcal{F}_S^R \subset [\mathbb{A}^N/G]$ est donc un ouvert du champ quotient de $\mathbb{A}^N$ par un groupe G. Ce groupe G contient une extension par $\mathbb{G}_m$ du sous-groupe G' non réductif des automorphismes de $\mathbb{P}^n$ (resp. $\mathbb{P}^3$) fixant $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ (resp. $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$) point par point. Il contient aussi le sous-groupe G'' des éléments qui préservent les idéaux I_t des variétés de Fano $X_t = V_{\mathbb{P}^n}(I_t)$. La variété X_t est ainsi représentée par $\bar{t} \in \mathbb{A}^N/G''$. L'orbite d'un point $t \in \mathbb{A}^N$ sous l'action de G représente aussi l'orbite de la variété $X_t = V(I_t) \subset \mathbb{P}^n$ (représentée par $\bar{t} \in \mathbb{A}^N/G''$) sous l'action de G'. Les automorphismes des points du champ $\mathbb{A}^N$ sont alors les stabilisateurs $G'_{\bar{t}}$ des points $\bar{t} \in \mathbb{A}^N/G''$ de $\mathbb{A}^N/G''$ dans G'. On rappelle que si un groupe agit sur un ensemble, les stabilisateurs de deux points de cet ensemble appartenant à une même orbite sont conjugués. En particulier, si $\bar{t}, \overline{t'} \in \mathbb{A}^N/G''$ sont dans la même orbite, alors $G'_{\bar{t}}$ et $G'_{\overline{t'}}$ sont isomorphes.

Proposition 5.2.2. *Le champ $\mathcal{F}_S^R$ est un ouvert du champ $\overline{\mathcal{F}_S^R}$ décrit dans le tableau ci-dessous suivant les cas $g = 2, \ldots, 10$:*

g	$\dim \mathcal{F}_S^R$	*Description de* $\overline{\mathcal{F}_S^R}$
2	52	$[\mathbb{A}^{57}/\mathbb{G}_m \times (\mathbb{G}_a^3 \rtimes \mathbb{G}_m)] = [\mathbb{P}^{56}/\mathbb{G}_a^3 \rtimes \mathbb{G}_m)]$
3	30	$[\mathbb{A}^{36}/\mathbb{G}_m \times (\mathbb{G}_a^4 \rtimes \mathbb{G}_m)] = [\mathbb{P}^{35}/\mathbb{G}_a^4 \rtimes \mathbb{G}_m)]$
4	20	$[\mathbb{A}^{29}/\mathbb{G}_m^2 \times (\mathbb{G}_a \times (\mathbb{G}_a^5 \rtimes \mathbb{G}_m))] = [\mathbb{P}^{21} \times \mathbb{P}^6/\mathbb{G}_a \times (\mathbb{G}_a^5 \rtimes \mathbb{G}_m)]$
5	14	$[\mathbb{A}^{24}/\mathbb{G}_m^3 \times (\mathbb{G}_a^6 \rtimes \mathbb{G}_m)] = [\mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7/\mathbb{G}_a^6 \rtimes \mathbb{G}_m)]$
6	10	$\left[\mathbb{A}^{10} \times \mathrm{GL}\,(3) \Big/ \mathbb{G}_a^2 \rtimes \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right]$
7	7	$\mathbb{P}^7$
8	5	$\mathbb{P}^5$
9	3	$\mathbb{P}^3$
10	2	$\mathbb{P}^2$

Démonstration. On montre cette proposition famille par famille.

Pour $f_d(x_0, \ldots, x_r)$ de degré d on note $T(f_d)(\lambda_0, \ldots, \lambda_r) = T(f_d)(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)(x_0, \ldots, x_r, x_{r+1})$ le polynôme de degré $d-1$ en $(x_0, \ldots, x_{r+1})$ tel que

$$f_d(x_0 + \lambda_0 x_{r+1}, \ldots, x_r + \lambda_r x_{r+1}) = f_d(x_0, \ldots, x_r) + x_{r+1} T(f_d)(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)(x_0, \ldots, x_r, x_{r+1}).$$

g=2 : La surface S est un revêtement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié en une sextique lisse d'équation $f_6^S(x_0, x_1, x_2) = 0$ et toutes les extensions de X_t de Fano de S sont représentées sous la forme d'un revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié en une surface sextique lisse R_t d'équation

$$t_0 f_6^S(x_0, x_1, x_2) + x_3 \phi_5(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où $\phi_5 \in H^0(\mathbb{P}^3, O(5))$ est une forme quintique assez générique. Soit $\mathrm{Aut}_{H_2}(\mathbb{P}^3)$ le sous-groupe de $\mathrm{PGL}\,(4)$ laissant l'hyperplan $H_2 = V(x_3) \subset \mathbb{P}^3$ invariant. Les éléments de $\mathrm{Aut}_{H_2}(\mathbb{P}^3)$ sont les éléments de $\mathrm{PGL}\,(4)$ de la forme $\psi_\lambda(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0 + \lambda_0 x_3, x_1 + \lambda_1 x_3, x_2 + \lambda_2 x_3, \lambda_3 x_3)$. La classe d'isomorphisme d'un revêtement double $X \to \mathbb{P}^3$ ramifié en R_t est constituée des revêtements doubles de $\mathbb{P}^3$ ramifiés en $\psi_\lambda(R_t)$. Le champ de modules $\mathcal{F}_S^R$ est donc un ouvert du champ quotient $\mathbb{A}^{57}/\mathbb{G}_m \times (\mathbb{G}_a^3 \rtimes \mathbb{G}_m)$, où $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a^3 \rtimes \mathbb{G}_m$ agit sur l'espace affine $\mathbb{A}^{57} = \{(t_0, \phi_5)\}$ par :

$$(a, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{G}_m \times (\mathbb{G}_a^3 \rtimes \mathbb{G}_m) : (t_0, \phi_5(x_0, \ldots, x_3)) \longmapsto (a t_0, a\lambda_3 \phi_5(\psi_\lambda(x_0, x_1, x_2, x_3)) + a t_0 T(f_6^S)(\lambda_0, \ldots, \lambda_2)).$$

g=3 : La surface $K3$ S est une quartique lisse de $\mathbb{P}^3$ d'équation $f_4^S(x_0, \ldots, x_3) = 0$, et toutes les extensions de Fano X_t de S sont représentées par les quartiques lisses de $\mathbb{P}^4$ contenant $S = V_{\mathbb{P}^4}(f_4^S(x_0, \ldots, x_3), x_4)$. De telles quartiques ont pour équation

$$t_0 f_4^S(x_0, \ldots, x_3) + x_4 \phi_3(x_0, \ldots, x_4) = 0,$$

où $\phi_3 \in H^0(\mathbb{P}^3, O(5))$ est une forme cubique assez générique. Soit $\mathrm{Aut}_{H_4}(\mathbb{P}^4)$ le sous-groupe de $\mathrm{PGL}\,(5)$ laissant l'hyperplan $H_4 = V_{\mathbb{P}^4}(x_4)$ invariant. Les éléments de $\mathrm{Aut}_{H_4}(\mathbb{P}^4)$ sont les éléments de $\mathrm{PGL}\,(5)$ de la forme $\psi_\lambda(x_0, \ldots, x_3, x_4) = (x_0 + \lambda_0 x_4, \ldots, x_3 + \lambda_3 x_4, \lambda_4 x_4)$. La classe d'isomorphisme de $X_t = V_{\mathbb{P}^4}(f_4^S + x_4\phi_3)$ est l'orbite $\{\psi_\lambda(X_t), \psi_\lambda \in \mathrm{Aut}_{H_4}(\mathbb{P}^4)\}$. Le champ de modules $\mathcal{F}_S^R$ est donc un ouvert du champ quotient $\mathbb{A}^{36}/\mathbb{G}_m \times (\mathbb{G}_a^4 \rtimes \mathbb{G}_m)$, où $G = \mathbb{G}_m \times (\mathbb{G}_a^4 \rtimes \mathbb{G}_m)$ agit sur l'espace affine $\mathbb{A}^{36} = \{(t_0, \phi_3)\}$ par :

$$(a, \lambda_0, \ldots, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{G}_m \times (\mathbb{G}_a^3 \rtimes \mathbb{G}_m) : (t_0, \phi_3) \longmapsto (a t_0, a\lambda_4 \phi_3(\psi_\lambda(x_0, \ldots, x_4)) + a t_0 T(f_4^S)(\lambda_0, \ldots, \lambda_3)).$$

g=4 : La surface K3 $S = V_{\mathbb{P}^4}(q_2^S(x_0, \ldots, x_4), f_3^S(x_0, \ldots, x_4))$ est une intersection complète d'une quadrique et d'une cubique de $\mathbb{P}^4$ et toutes les extensions de Fano X_t de S sont représentées par une intersection complète lisse d'une quadrique et d'une cubique de $\mathbb{P}^5$ contenant $S = V_{\mathbb{P}^5}(q_2^S(x_0, \ldots, x_4), f_3^S(x_0, \ldots, x_4), x_5)$ donc de la forme $X_t = V_{\mathbb{P}^5}(f_3, q_2)$ où

$$\begin{cases} f_3 = t_0 f_3^S(x_0, \ldots, x_4) + x_5 \phi_2(x_0, \ldots, x_5) \\ q_2 = t_1 q_2^S(x_0, \ldots, x_4) + x_5 \phi_1(x_0, \ldots, x_5), \end{cases}$$

ϕ_1 étant une forme linéaire et ϕ_2 une forme quadratique. Soit $\mathrm{Aut}_{H_5}(\mathbb{P}^5)$ le sous-groupe de $\mathrm{PGL}\,(6)$ laissant l'hyperplan $H_5 = V_{\mathbb{P}^5}(x_5)$ invariant. Les éléments de $\mathrm{Aut}_{H_5}(\mathbb{P}^5)$ sont les éléments de $\mathrm{PGL}\,(6)$ de la forme $\psi_\lambda(x_0, \ldots, x_4, x_5) =$

$(x_0+\lambda_0 x_5, \ldots, x_4+\lambda_4 x_5, \lambda_5 x_5)$. La classe d'isomorphisme de $X_t = V_{\mathbb{P}^5}(f_3, q_2)$ est l'orbite $\{\psi_\lambda(X_t), \psi_\lambda \in \mathrm{Aut}_{H_5}(\mathbb{P}^5)\}$. Le champ de modules $\mathcal{F}_6^S$ est donc le champ quotient de l'espace affine $\mathbb{A}^{29} = \{(t_0, t_1, \phi_2, \phi_1)\}$ produit de l'espace affine des formes linéaires de dimension 6, de l'espace affine des formes quadratiques de dimension 21 et de $\mathbb{A}^2 = \{(t_1, t_2)\}$ par le groupe $\mathbb{G}_m^2 \times (\mathbb{G}_a \times (\mathbb{G}_a^5 \ltimes \mathbb{G}_m))$, l'action étant la suivante :

$$(a, b, \mu, \lambda_0, \ldots, \lambda_4, \lambda_5) : (t_0, t_1, \phi_1, \phi_2) \in \mathbb{A}^{29} \longmapsto (at_0, bt_1, a\lambda_5\phi_1(\psi_\lambda(x_0, \ldots, x_5)) + at_0 T(q_2^S)(\lambda_0, \ldots, \lambda_4),$$
$$b\lambda_5\phi_2(\psi_\lambda(x_0, \ldots, x_5)) + bt_1 T(f_3^S)(\lambda_0, \ldots, \lambda_4) + \mu(t_1 q_2^S + x_5(a\lambda_5\phi_1(\psi_\lambda(x_0, \ldots, x_5)) + at_0 T(q_2^S(\lambda_0, \ldots, \lambda_4))))).$$

En effet pour $f_3 = t_0 f_3^S + x_5\phi_2$, $q_2 = t_1 q_2^S + x_5\phi_1$ et $f_3' = t_0' f_3^S + x_5\phi_2'$, $q_2' = t_1' q_2^S + x_5\phi_2$, on a $V(f_3, q_2) = V(f_3', q_2') \subset \mathbb{P}^5$ si et seulement si $f_3' = f_3 + lq_2$ où $l = a_0x_0 + \ldots + a_5x_5$ est une forme linéaire, si et seulement si $x_5(\phi_2' - \phi_2 - l\phi_1 - a_5 t_1 q_2^S) - (a_0x_0 + \ldots + a_4x_4)t_1 q_2^S = 0$ si et seulement si $a_0 = \ldots = a_4 = 0$ et $\phi_2' = \phi_2 + a_5(\phi_1 + t_1 q_2^S)$, d'où l'action du troisième facteur $\mathbb{G}_a$ avec $\mu = a_5$.

g=5 : Les variétés de Fano X sont les intersections complètes lisses de trois quadriques q_1, q_2 et q_3 dans $\mathbb{P}^6$. La surface K3 $S = V_{\mathbb{P}^6}(q_1^S(x_0, \ldots, x_5), q_2^S(x_0, \ldots, x_5), q_3^S(x_0, \ldots, x_5), x_6)$ est une section de X par une hyperplan. Toutes les extensions de Fano X_t de S sont représentées sous la forme $X_t = V_{\mathbb{P}^6}(q_1, q_2, q_3)$, où

$$q_i = t_i q_i^S(x_0, \ldots, x_5) + x_6 \ell_i(x_0, \ldots, x_6)$$

pour $i = 1, 2, 3$, les ℓ_i étant des formes linéaires. Soit $\mathrm{Aut}_{H_6}(\mathbb{P}^6)$ le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(7)$ laissant l'hyperplan $H_6 = V_{\mathbb{P}^6}(x_6)$ invariant. Les éléments de $\mathrm{Aut}_{H_6}(\mathbb{P}^6)$ sont les éléments de $\mathrm{PGL}(7)$ de la forme $\psi_\lambda(x_0, \ldots, x_5, x_6) = (x_0 + \lambda_0 x_6, \ldots, x_5 + \lambda_5 x_6, \lambda_6 x_6)$. La classe d'isomorphisme de $X_t = V_{\mathbb{P}^6}(q_1, q_2, q_3)$ est l'orbite $\{\psi_\lambda(X_t), \psi_\lambda \in \mathrm{Aut}_{H_6}(\mathbb{P}^6)\}$. Le champ de modules $\mathcal{F}_8^S$ est donc le champ quotient de $\mathbb{A}^{24}$ par $\mathbb{G}_m^3 \times (\mathbb{G}_a^6 \rtimes \mathbb{G}_m)$, l'action étant la suivante :

$$(a, b, c, \lambda_0, \ldots, \lambda_5, \lambda_6) : ((t_1, t_2, t_3, \ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{A}^{24} \longmapsto (at_1, bt_2, ct_3, a\lambda_6\ell_1 \circ \psi_\lambda + at_1 T(q_1^S)(\lambda_0, \ldots, \lambda_5),$$
$$b\lambda_6\ell_2 \circ \psi_\lambda + bt_2 T(q_2^S)(\lambda_0, \ldots, \lambda_5), c\lambda_6\ell_3 \circ \psi_\lambda + ct_3 T(q_2^S)(\lambda_0, \ldots, \lambda_5))).$$

En effet, pour $q_i = t_i q_i^S + x_6\ell_i$ et $q_i' = t_i' q_i^S + x_6\ell_i'$, $V_{\mathbb{P}^6}(q_1, q_2, q_3) = V_{\mathbb{P}^6}(q_1', q_2', q_3')$ si et seulement si $\ell_i' = \ell_i$.

g=6 : Les variétés de Fano X sont les sections $X = V(h_1, h_2, q_5, I_{\mathrm{Gr}}) = \mathrm{Gr}(2,5) \cap H_1 \cap H_2 \cap Q_8 \subset \mathbb{P}^9$ de la grassmanienne par deux hyperplans H_1, H_2 et une quadrique Q_8. La surface K3 $S = V(h_1, h_2, h_3, q_8^S, I_{\mathrm{Gr}}) = \mathrm{Gr}(2,5) \cap H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap Q_8^S \subset \mathbb{P}^9$ est une section de la grassmannienne par trois hyperplans H_1, H_2, H_3 et une quadrique Q_8^S. On note h_1, h_2, h_3 les formes linéaires et q_8^S la forme quadratique respectives. Toutes les extensions de Fano X_t de S se représentent sous la forme $X = V(h_1, h_2, \tilde{q}_8, I_{\mathrm{Gr}}) \subset \mathbb{P}^9$, où $\tilde{q}_8 = q_8^S + h_3\phi_1(x_0, \ldots, x_9)$, la forme linéaire ϕ_1 dépendant de 10 paramètres. La fixation de S détermine les h_i modulo l'action du groupe linéaire $\mathrm{GL}(3)$, donc le champ de modules $\mathcal{F}_S^R$ est le champ quotient

$$\left[\mathbb{A}^{10} \times \mathrm{GL}(3) \middle/ \mathbb{G}_a^2 \rtimes \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right]$$

par l'action suivante :

$$(\mu_1, \mu_2, M) \in \mathbb{G}_a^2 \rtimes \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} : (\phi_1, (h_1, h_2, h_3)) \longmapsto (\phi_1 + \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2,\ (h_1, h_2, h_3) \cdot M^{-1}).$$

g=7 : Les variétés de Fano X sont les sections linéaires de la variété spinorielle Σ_{12}^{10}, plongée dans l'espace projectivisé des demi-spineurs $\mathbb{P}^{15}$, par un sous-espace linéaire Λ_8 de dimension 8. Ici $\Sigma_{2g-2}^n \subset \mathbb{P}^{g+n-2}$ désigne une extension de S de dimension maximale, notée n, de sorte que S s'obtienne de Σ_{2g-2}^n comme une section linéaire transversale. La surface K3 S est une section de Σ_{12}^{10} par un sous-espace linéaire Λ_7 de dimension 7, et $S = \Lambda_7 \cap \Sigma_{12}^{10} \subset X = \Lambda_8 \cap \Sigma_{12}^{10}$ si et seulement si $\Lambda_7 \subset \Lambda_8$.

g=8 : Les variétés de Fano X sont les sections linéaires de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,6) = \Sigma_{14}^8$, plongé dans $\mathbb{P}^{14}$ à la Plücker, par un sous-espace linéaire $\Lambda_9 \subset \mathbb{P}^{14}$ de dimension 9. La surface K3 S est une section de Σ_{14}^8 par un sous-espace linéaire Λ_8 de dimension 8,et $S = \Lambda_8 \cap \Sigma_{14}^8 \subset X = \Lambda_9 \cap \Sigma_{14}^8$ si et seulement si $\Lambda_8 \subset \Lambda_9$.

g=9 : Les variétés de Fano X sont les sections linéaires de la grassmannienne lagrangienne $\mathrm{LGr}\,(2,6) = \Sigma_{16}^6$ dans son plongement naturel dans $\mathbb{P}^{13}$ par un sous-espace linéaire $\Lambda_{10} \subset \mathbb{P}^{13}$ de dimension 10. La surface K3 S est une section de $\Sigma_{16}^6 \subset \mathbb{P}^{13}$ par un sous-espace linéaire Λ_9 de dimension 9, et $S = \Lambda_9 \cap \Sigma_{16}^6 \subset X = \Lambda_{10} \cap \Sigma_{16}^6$ si et seulement si $\Lambda_9 \subset \Lambda_{10}$.
g=10 : Les variétés de Fano X sont les sections linéaires de l'orbite minimale Σ_{18}^5 du groupe exceptionnel G_2 dans le projectivisé $\mathbb{P}^{13}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2$ par un sous-espace linéaire $\Lambda_{10} \subset \mathbb{P}^{13}$ de dimension 10. La surface K3 S est une section de $\Sigma_{18}^5 \subset \mathbb{P}^{13}$ par un sous-espace linéaire Λ_9 de dimension 9, et $S = \Lambda_9 \cap \Sigma_{18}^5 \subset X = \Lambda_{10} \cap \Sigma_{18}^5$ si et seulement si $\Lambda_9 \subset \Lambda_{10}$.

□

Remark 5.2.3. *La seule variété de Fano de la série principale exclue dans la proposition 5.2.2 est X_{22}. On ne la considère pas car sa jacobienne intermédiaire est nulle.*

Proposition 5.2.4. *(i) Pour $3 \leq g \leq 5$, les champs $\mathcal{F}_S^R$ sont de Deligne-Mumford car le groupe des automorphismes d'un point du champ est fini et réduit.*
(ii) Pour $g = 3$ et $g = 4$, les champs $\mathcal{F}_S^R$ ne sont pas représentables car certains points de ces champs possèdent des automorphismes non triviaux.

Démonstration.
(i) : Pour $3 \leq g \leq 5$, les variétés de Fano sont des intersections complètes lisses $X \subset \mathbb{P}^{g+1}$. Cela résulte alors de [12].
(ii) : **g=3**. Soit $t \in \mathbb{A}^{36}$, les automorphismes de $X_t = V(f_{4t}) \subset \mathbb{P}^4$ constituent le stabilisateur G_t de t dans $G = \mathbb{G}_a^4 \rtimes \mathbb{G}_m$. Considérons la quartique

$$f_{4b} = f_4^S + x_4(x_4 q_b(x_0,\dots,x_3) + x_4^3) = f_4^S(x_0,\dots,x_3) + x_4^2 q_b(x_0,\dots,x_3) + x_4^4$$

contenant S. Le stabilisateur G_t de la quartique lisse $X_t = V(f_{4t}) \subset \mathbb{P}^4$ contient l'élément d'ordre deux $\phi_{(-1,0,\dots,0)}$, donc est non trivial.
g=4. Soit $t \in \mathbb{A}^{29}$, les automorphismes de $X_t = V(f_{3t}, q_{2t}) \subset \mathbb{P}^5$ constituent le stabilisateur $G'_{\bar{t}}$ de $\bar{t} \in \mathbb{A}^{29}/\mathbb{G}_m^2 \times \mathbb{G}_a$ dans $G' = \mathrm{Aut}_{H_5}(\mathbb{P}^5) = \mathbb{G}_a^5 \rtimes \mathbb{G}_m$. Considérons l'intersection complète lisse

$$X_t = V(q_2^S(x_0,\dots,x_4), f_3^S(x_0,\dots,x_4) + x_5^3) \subset \mathbb{P}^5$$

contenant S. Alors l'élément d'ordre trois $\phi_{(e^{2i\pi/3},0,\dots,0)}$ appartient au stabilisateur $G'_{\bar{t}}$ de $\bar{t}$ dans G' qui est donc non trivial.

□

La proposition suivante concerne la jacobienne intermédiaire d'une variété de Fano de dimension 3 d'indice 1 et de nombre de Picard 1 :

Proposition 5.2.5. *(i) [34, Theorème 8] Soit X une variété de Fano générale de dimension 3, d'indice 1, de nombre de Picard 1, de genre g et telle que le schéma de Hilbert des coniques $F_2(X)$ est lisse. Alors la correspondance d'incidence $\Gamma_2 \subset F_2(X) \times X$ induit un isomorphisme*

$$\Gamma_{2*}\,\mathrm{Alb}\,F_2(X) \xrightarrow{\sim} J(X).$$

*(ii) Dans le cas **g=3**, $X = V(f_4) \subset \mathbb{P}^4$ est une quartique lisse et on a un isomorphisme*

$$\mathbb{C}[x_0,\dots,x_4]_3/(\partial_{x_i} f_4) \xrightarrow{\sim} H^{2,1}(X).$$

*(iii) Dans les cas **g=4** et **g=5**, la proposition 5.2.8 donne une description alternative de la jacobienne intermédiaire des variétés de Fano de ces genres : la jacobienne intermédiaire d'une intersection complète lisse $X = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^5$ d'une quadrique et d'une cubique est un quotient d'une variété de Prym généralisée par une variété de Prym, et la jacobienne intermédiaire d'une intersection complète lisse $X = V(q_1, q_2, q_3) \subset \mathbb{P}^6$ de trois quadriques est une variété de Prym.*

La preuve de la proposition 5.2.6 ci-dessous se trouve dans le livre de C.Voisin [79].

Proposition 5.2.6. *Soit $X = V(f_d) \subset \mathbb{P}^n$, où $f_d \in H(\mathbb{P}^n, O(d)) = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_d$, une hypersurface de degré d.*

(i) L'espace tangent $T_{f_d}O_{PGL(n)}(f_d) \subset H(\mathbb{P}^n, O(d))$ à l'orbite de f_d sous l'action de $PGL(n)$ est le sous-espace affine engendré par les éléments de degré d de l'ideal jacobien $J_{f_d} = (\partial_{x_0} f_d, \ldots, \partial_{x_n} f_d) \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$:

$$T_f O_{PGL(n)}(f) = \langle J^d_{f_d} \rangle = \langle x_0 \partial_{x_0} f_d, \ldots, x_n \partial_{x_0} f_d, x_0 \partial_{x_1} f_d, \ldots, x_n \partial_{x_n} f_d \rangle.$$

Ainsi si $(M^d_1, \ldots, M^d_r)$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_d/(J^d_{f_d})$, alors le sous-espace affine $\mathbb{A}^r = f_d + \langle M^d_1, \ldots, M^d_r \rangle \subset H(\mathbb{P}^n, O(d))$ est une transversale à l'orbite, paramétrant la famille

$$\mathcal{X} = V(f_d + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M^d_i) \subset \mathbb{A}^r \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{A}^r.$$

(ii) On a un isomorphisme $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_{p+q+pq}/(J^{p+q+pq}_{f_d}) \xrightarrow{\sim} H^{p,n-1-q}(X)$.

La proposition suivante montre que dans le cas **g=3** et $S = V(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4, x_4) \subset \mathbb{P}^4$, la forme symplectique sur la jacobienne intermédiaire relative du champ $\mathcal{F}^R_S$ ne se relève à une forme symplectique sur aucune résolution de singularités de l'espace de modules grossier de la jacobienne intermédiaire relative à cause de la présence de singularités. Remarquons aussi qu'au voisinage de tels points la jacobienne intermédiaire relative champêtre reste lisse, tandis que son espace de modules grossier acquiert des singularités quotients.

Proposition 5.2.7. *Soit $S = V(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4, x_4) \subset \mathbb{P}^4$. Soit $s \in \mathcal{F}^R_S$ le point correspondant à la classe d'isomorphisme de $X_s = V(f_{4s}) \subset \mathbb{P}^4$, où $f_{4s} = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$; alors* $\mathrm{Aut}\,(X_s) = \langle \psi \rangle$*, où $\psi \in \mathrm{Aut}_{H_4}(\mathbb{P}^4)$ est l'automorphisme d'ordre 4 donné dans les coordonnées $(x_0, \ldots, x_4)$ par la matrice* $\mathrm{diag}\,(1, 1, 1, 1, i)$*. Soit $(M_1, \ldots, M_{30})$ une base de $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_4]_3/J_{f_{4s}}$. Alors le sous-espace affine*

$$\mathbb{A}^{30} = f_{4s} + \langle x_4 M_1, \ldots, x_4 M_{30} \rangle \subset H^0(\mathbb{P}^4, O(4)),$$

qui est l'intersection de la transversale à la PGL (5)*-orbite de f_{4s} dans $H^0(\mathbb{P}^4, O(4))$ (cf. proposition 5.2.6,(i)) et du sous-espace vectoriel $T_S = H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{I}_S \otimes O(4))$, est la transversale à la* $\mathrm{Aut}_{H_4}(\mathbb{P}^4)$*-orbite de f_{4s} dans T_S. Soit $B_s \subset \mathbb{A}^{30} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{30})\}$ un ouvert de cette transversale au voisinage de f_4 suffisamment petit, de sorte que $f_{4,\lambda} = f_{4s} + x_4 \sum_{i=1}^{30} \lambda_i M_i$ soit lisse et que le morphisme $B_s \to \mathcal{F}_S$, donné par la famille*

$$\mathcal{X}_{B_s} = V(f_{4,\lambda}) \subset B_s \times \mathbb{P}^4 \to B_s,$$

soit une carte étale de ce champ. Alors la forme symplectique sur la jacobienne intermédiaire relative $J(\mathcal{X}_{B_s}/B_s) \to B_s$ ne se relève pas au voisinage de s en une forme symplectique sur une désingularisation du quotient $J(\mathcal{X}_{B_s}/B_s)/\langle \psi \rangle \to B_s/\langle \psi \rangle$.

Démonstration. Le stabilisateur G_s de s est un sous-groupe d'ordre 4 engendré par l'élément $\psi : (x_0, \ldots, x_4) \mapsto (x_0, x_1, \ldots, ix_4)$ de $\mathrm{Aut}_{H_4}(\mathbb{P}^4)$. Localement analytiquement, la forme symplectique sur $J_{B_s} = J(\mathcal{X}_{B_s}/B_s) \to B_s$ s'écrit par $\omega = \sum d\lambda_i \wedge d\eta_i$, où η_i sont les coordonnées de l'espace tangent de $J(X_s)$. Cette forme est par définition invariante par l'action de G_s. Le sous-espace propre de valeur propre $-i$, engendré par les M_i qui sont des multiples de x_4^2, i.e. $x_4^2 x_0, \ldots, x_4^2 x_3$, est de dimension 4 ; celui de valeur propre i, engendré par les M_i non divisibles par x_4, est de dimension 16, et celui de valeur propre -1, constitué des M_i divisibles par x_4 et non par x_4^2, i.e. $x_4 x_i x_j$, $0 \leq i \leq j < 4$, est de dimension 10. Donc le lieu singulier de $B_s/\langle \psi \rangle$ est de dimension 10. Ainsi la forme symplectique ω sur $J_{B_s} \to B_s$ ne se relève pas en une forme symplectique au-dessus d'une désingularisation de $B_s/\langle \psi \rangle$, car $\mathrm{codim}\,(J_{B_s}/\langle \psi \rangle, \mathrm{sing}\,(J_{B_s}/\langle \psi \rangle)) = 2 \dim\,(B_s/\langle \psi \rangle) - 20 = 40$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2} \dim\,(J_{B_s}/\langle \psi \rangle) = \dim\,(B_s/\langle \psi \rangle) = 15$ (voir prop. 3.3 dans [23]). $\square$

Dans les cas **g=4** et **g=5**, on a la description alternative suivante de la jacobienne intermédiaire relative.

Proposition 5.2.8. *(i)* ***g=4*** *: Soit $S = V(f_{3,0}, q_0, x_0) \subset \mathbb{P}^5$. Soit $B \subset T^S = \mathbb{A}^{27}$ l'ouvert représentant les intersections complètes d'une cubique et d'une quadrique, contenant S, qui sont lisses. Il existe un ouvert B^o de B et un revêtement fini $\tilde{B^o} \to B^o$, au-dessus duquel la jacobienne intermédiaire relative $J(\mathcal{X}_{\tilde{B^o}}/\tilde{B^o}) \to \tilde{B^o}$ est un quotient d'une famille dont les fibres sont des variétés de Prym $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\Delta}_t, \Delta_t)$ de revêtements doubles au-dessus d'hypersurfaces $\Delta_t \subset \mathbb{P}^1 \times H_{3t}$, où $H_{3t} \subset \mathbb{P}^5$ est un 3-plan, par une famille dont les fibres sont des variétés de Prym $\mathrm{Prym}\,(\tilde{C}_t, C_t)$ de revêtements doubles au-dessus de courbes $C_t \subset H_{3t} \cap V(x_0)$.*

(ii) ***g=5*** *: Soit $S = V(q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0}, x_0) \subset \mathbb{P}^6$. Soit $B \subset T^S = \mathbb{A}^{21}$ l'ouvert représentant les intersections complètes de trois quadriques contenant S qui sont lisses. Les fibres de la jacobienne intermédiaire relative $J(\mathcal{X}_B/B) \to B$ sont les variétés de Prym $\mathrm{Prym}\,(\tilde{C}_t, C_t)$ de revêtements doubles au-dessus de courbes $C_t \subset \mathbb{P}^2$.*

Démonstration.
(i) : Soit $X = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^5$ contenant la surface $K3$ $S = V(f_{30}, q_0, x_0) \subset \mathbb{P}^5$. Les cubiques de $\mathbb{P}^5$ contenant X sont paramétrées par le sous-espace linéaire $\Lambda_6(X) = \{f_{3t} = t_0 f_3 + l_t q\} \subset \mathbb{P}(S_5^3)$, où $l_t \in S_5^1$ parcours les formes linéaires. On considère alors le pinceau de cubiques $\Lambda_1(X) = \{f_{3t} = t_0 f_3 + t_1 x_0 q\} \subset \Lambda_6(X)$ contenant X, et :

— $p_1 : Z = V(t_0 f_3 + t_1 x_0 q) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^1$, la restriction de la première projection qui est le fibré en cubique correspondant,

— $p_2 : Z = V(t_0 f_3 + t_1 x_0 q) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^5$, la restriction de la seconde projection qui s'identifie à l'éclatement de $\mathbb{P}^5$ en le lieu de base $V(f_3, x_0 q) = X \cup K \subset \mathbb{P}^5$ du pinceau, où $K = V(f_3, x_0) \subset \mathbb{P}^5$ est une cubique,

— la surface $K3$ $S' = V(t_0, f_{3,0}, q_0, x_0) = V(t_0, f_3, q, x_0) \subset Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5$, contenue dans Z, de sorte que p_2 induit un isomorphisme, noté encore $p_2 : S' = V(t_0, f_{3,0}, q_0, x_0) = V(t_0, f_3, q, x_0) \xrightarrow{\sim} S = V(f_{3,0}, q_0, x_0) = V(f_3, q, x_0) = X \cap K \subset \mathbb{P}^5$.

On a $\mathrm{sing}\,(Z) \subset V(f_3, x_0 q) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5$. Pour f_3 et q génériques, $\mathrm{sing}\,(Z) = S'$.

On a ainsi la famille

$$\mathcal{Z} = V(t_0 f_3 + t_1 x_0 q) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \times T^S \to T^S,$$

où pour $t' \in T^S$, $p_1 : Z_{t'} = V(t_0 f_{3,t'} + t_1 x_0 q_{t'}) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^1$ est un fibré en cubiques et $S = S' = V(t_0, f_{3,0}, q_0, x_0) \subset \mathcal{Z}_{t'}$.

On considère un sous-schéma $\tilde{T^S} \subset F_1(\mathcal{X}/T^S) \to T^S$, tel que le morphisme $\tilde{T^S} \to T^S$ est génériquement fini, et les changements de base suivants :

— $\tilde{\mathcal{X}} = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^5 \times \tilde{T^S} \to \tilde{T^S}$, et

— $\tilde{\mathcal{Z}} = V(t_0 f_3 + t_1 x_0 q) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \times \tilde{T^S} \to \tilde{T^S}$.

Il existe alors une famille de droites de $\mathbb{P}^5$, notée $\mathcal{L}$, telle que :

— $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{X}} \subset \mathbb{P}^5 \times \tilde{T^S} \to \tilde{T^S}$, où pour $t' \in \tilde{T^S}$, $\mathcal{L}_{t'} = l_{t'}$ est une droite contenue dans $X_{t'} = V(f_{3t'}, q_{t'}) \subset \mathbb{P}^5$,

— $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{L} \subset \mathcal{Z}' \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \times T'^S \to \mathbb{P}^1 \times T'^S$ est une droite relative contenue dans la famille de cubiques.

Cette dernière famille est singulière. On utilise la désingularisation en $S' \times \tilde{T^S}$ proposée par Otwinowska ([63]) ; la famille $\tilde{\mathcal{Z}} \to \tilde{T^S}$ devient alors lisse pour $t' \in \tilde{T^S}$ générique, puis on effectue l'éclatement en le transformé strict de $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{Z}}$. Ainsi on obtient la famille

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{des} \to \tilde{\mathcal{Z}} \to \tilde{T^S}.$$

La projection linéaire relative depuis $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^5 \times \tilde{T^S}$ sur un sous-espace linéaire relatif $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^5 \times \tilde{T^S}$, de dimension relatif 3, donne alors le morphisme

$$k : \tilde{\mathcal{Z}}_{des} \to \tilde{\mathcal{Z}} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \times \tilde{T^S} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}.$$

Pour $t' \in \tilde{T^S}$ générique, $\tilde{\mathcal{Z}}_{des,t'} = Z_{des,t'}$ est lisse, et le morphisme $k_{t'} : Z_{des,t'} \to Z_t \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^1 \times H_{3t'}$ de projection linéaire depuis $l_{t'} = \mathcal{L}_{t'}$ sur $H_{3t'} \subset \mathbb{P}^5$ est alors génériquement un fibré en coniques.

Pour $t' \in \tilde{T^S}$ générique, $X_{t'} = V(f_{3t'}, q_{t'}) \subset \mathbb{P}^5$ et $K'_t = V(f_{3t'}, x_0) \subset \mathbb{P}^5$ sont lisses et on a $J(X_{t'}) \oplus J(K_{t'}) \xrightarrow{\sim} J(Z_{des,t'})$.

(ii) : Pour $X = V(q_1, q_2, q_3) \subset \mathbb{P}^6$ contenant S, on considère le fibré en quadriques $p_1 : Z = V(t_1 q_1 + t_2 q_2 + t_3 q_3) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^6 \to \mathbb{P}^2$. Le morphisme $p_2 : Z \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^6 \to \mathbb{P}^6$ induit par la deuxième projection s'identifie à l'éclatement de $\mathbb{P}^6$ en X. La surface $K3$ $S' = V(t_1, t_2, q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0}, x_0) = V(t_1, t_2, q_1, q_2, q_3, x_0) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^6$ est contenue dans Z, et p_2 induit un isomorphisme, noté encore $p_2 : S' \xrightarrow{\sim} S$.

On a la famille $\mathcal{Z} = V(t_1q_1 + t_2q_2 + t_3q_3) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^6 \times T^S \to T^S$, dont la fibre au-dessus de $t' \in T^S$ est un fibré en quadriques $Z_{t'} = V(t_1q_{1t'} + t_2q_{2t'} + t_3q_{3t'}) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^6$, contenant la surface $K3$ $S = S'$.

Pour $t' \in B$, les fibres $X_{t'}$ et $Z_{t'}$ sont lisses, et on a un isomorphisme $J(X_{t'}) \xrightarrow{\sim} J(Z_{t'})$.

□

5.2.2 Variétés de Fano d'indice $r = 2$

Famille de degré $(-K_X)^3 = 8$

Les variétés de Fano X sont obtenues comme revêtements doubles $\pi : X \to \tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1)_v$ de l'éclatement $\tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1)_v$ de l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(2,1,1,1)$ en son sommet v. Ces revêtements sont ramifiés en un diviseur lisse $R \in |O_{\mathbb{P}(2,1,1,1)}(6)|$ ne passant pas par v. Les éléments de $|O_{\mathbb{P}(2,1,1,1)}(6)|$ sont les sections $R = \mathbb{P}(2,1,1,1) \cap K \subset \mathbb{P}^5$ de $\phi_{|O_{\mathbb{P}(2,1,1,1)}(2)|} : \mathbb{P}(2,1,1,1) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ par les cubiques $K \in |O_{\mathbb{P}^5}(3)|$ de $\mathbb{P}^5$. Il n'y a, à isomorphisme près, qu'un seul revêtement double de $\mathbb{P}(2,1,1,1)$ ramifié en un diviseur R donné comme ci-dessus. Ces variétés de Fano peuvent également être vues comme les hypersurfaces $X = V(t^2 - f_6(x_0,x_1,x_2,x_3)) \subset \mathbb{P}(3,2,1,1,1)$ de degré 6, où on note les coordonnées de l'espace projectif à poids par $(t, x_0, \ldots, x_3)$. On ne connaît pas actuellement de description géométrique de la jacobienne intermédiaire de V.

Proposition 5.2.9. *(i) Pour le fibré anticanonique de X, on a $-K_X = \pi^*\epsilon^* O_{\mathbb{P}(2,1,1,1)}(2)$, où $\epsilon : \tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1) \to \mathbb{P}(2,1,1,1)$ est le morphisme d'éclatement. De plus,* $\dim |-K_X| = \dim |O_{\mathbb{P}(2,1,1,1)}(2)| = 7$. *Donc une surface K3 $S \in |-K_X|$ est donnée dans $\mathbb{P}(3,2,1,1,1)$ par les équations du type suivant : $S = V_{\mathbb{P}(3,2,1,1,1)}(t^2 - f_6(x_0,x_1,x_2,x_3), q_2(x_0,x_1,x_2,x_3))$.*

(ii) Pour une surface K3 $S = V(t^2 - f_6^S(x_0,x_1,x_2,x_3), q_2^S(x_0,x_1,x_2,x_3)) \subset \mathbb{P}(3,2,1,1,1)$ fixée, l'espace de modules $\mathcal{F}_S^R$ est un ouvert de $\mathbb{P}^{21}$.

Démonstration. (i) : Soit $\pi : X \to \tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1)$ le revêtement double ramifié en $R \in |O_{\tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1)}(3H)|$, où $H = O_{\mathbb{P}(2,1,1,1)}(2)$. Calculons le fibré canonique de X. L'éclaté $\tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1)$ admet une structure d'un fibré projectif $p : \tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1) \to \mathbb{P}^2$ au-dessus de $\mathbb{P}^2$. Dans cette représentation, la classe H est celle du fibré en droites $O_{\tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1)/\mathbb{P}^2}(2)$ et on a $-K_{\tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1)} = 2H + L$, où $L = p^*(O_{\mathbb{P}^2}(1))$. Notons que $\mathrm{Pic}\,(\tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1))$ est de rang 2, mais $\mathrm{Pic}\,(\mathbb{P}(2,1,1,1)) = \mathbb{Z}[2L]$ est de rang 1, de plus, $H = 2L \in \mathrm{Pic}\,(\mathbb{P}(2,1,1,1))$ est la classe d'une section hyperplane du cône de Veronese $\mathbb{P}(2,1,1,1) \hookrightarrow \mathbb{P}^6$. Donc, $K_X = \pi^*(K_{\tilde{\mathbb{P}}(2,1,1,1)}) + 2\pi^*H - \pi^*L = \pi^*H$. Enfin $h^0(X, -K_X) = \chi(X, -K_X) = 1/2(-K_X)^3 + 3 = 8/2 + 3 = 7 = h^0(\mathbb{P}(2,1,1,1), O(2))$. Ceci prouve (i).

(ii) : Fixons une surface K3 $S = V(t^2 - f_6^S(x_0,x_1,x_2,x_3), q_2^S(x_0,x_1,x_2,x_3)) \subset \mathbb{P}(3,2,1,1,1)$. Toutes les extensions de Fano de S sont représentées par $X = V(f_6(t,x_0,x_1,x_2,x_3)) \subset \mathbb{P}(3,2,1,1,1)$, où

$$f_6(t,x_0,x_1,x_2,x_3) = \lambda_0(t^2 - f_6^S(x_0,x_1,x_2,x_3)) + q_2^S(x_0,x_1,x_2,x_3).(\lambda_1 x_0^2 + t\sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_i + x_0 \sum_{1\leq i\leq j\leq 3}\lambda_{ij}x_ix_j + f_4(x_1,x_2,x_3)).$$

□

Famille de degré $(-K_X)^3 = 16$

Les variétés de Fano de ce type sont les revêtements doubles de $\mathbb{P}^3$ (appelés solides doubles) ramifiés en une quartique $R_0 \in |4H|$ de $\mathbb{P}^3$. Le revêtement associé est noté $\pi : X \to \mathbb{P}^3$. Pour une quartique $R_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$, il n'y a, à isomorphisme près, qu'un seul revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié en R_0. Il peut être donné par l'équation $x_4^2 - f_4(x_0,\ldots,x_3) = 0$ dans $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ et est muni de la projection sur l'espace projectif correspondant aux quatre premières coordonnées. Le système linéaire complet $|O_{\mathbb{P}(1,1,1,1,2)}(2)|$ de dimension 11 définit un plongement $\phi : \mathbb{P}(1,1,1,1,2) \hookrightarrow \mathbb{P}^{10}$, qu'on donne en coordonnées par les formules $t = x_4$, $x_{ij} = x_ix_j$, $0 \leq i \leq j \leq 3$. Les variétés de Fano X sont donc obtenues comme sections de $\mathbb{P}(1,1,1,1,2) \subset \mathbb{P}^{10}$ par les quadriques $Q \subset \mathbb{P}^{10}$, l'équation de Q dans $\mathbb{P}^{10}$ étant de la forme $t^2 + tl(x_{ij}) + q(x_{ij}) = 0$. Une telle X possède un revêtement double sur $\mathbb{P}^3$ de diviseur de ramification $V(l^2(x_ix_j) - 4q(x_ix_j))$.

Proposition 5.2.10. *(i) On a $-K_X = \pi^*(2H)$, mais $\dim|-K_X| = 11 = \dim|2H|_{\mathbb{P}^3} + 1$. Une surface K3 $S \in |-K_X|$ est une intersection $S = \mathbb{P}(1,1,1,1,2) \cap Q \cap H$, où H est un hyperplan de $\mathbb{P}^{10}$.*

(ii) Si on fixe une surface K3 $S = \mathbb{P}(1,1,1,1,2) \cap Q \cap H \subset \mathbb{P}^{10}$, l'espace de modules $\mathcal{F}_S^R$, de dimension 10, est un ouvert du champ quotient $[\mathbb{A}^{12}/\mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a]$ de l'espace affine $\mathbb{A}^{12}$.

Démonstration.
(i) : On a $K_X = \pi^*(-4H) + [R] = -4H' + [R] = -2H' \in \mathrm{Pic}\,(X)$, où $H' = \pi^*H$ et $R = 1/2\pi^*R_0 = 2H'$. De plus, $h^0(X, -K_X) = \chi(X, -K_X) = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 3 = 8 + 3 = 11$. La classe canonique est $-K_X = O_X(2) = O_{\mathbb{P}(1,1,1,1,2)}(2)|_X$. Le morphisme $i_X : H^0(\mathbb{P}(1,1,1,1,2), O(2)) \xrightarrow{\sim} H^0(X, -K_X)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension 11, $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ étant le plongement fermé. La surface K3 est donc l'intersection de X avec un hyperplan de $\mathbb{P}^{10} = \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}(1,1,1,1,2), O(2))$.
(ii) : Fixons maintenant une surface K3 $S = \mathbb{P}(1,1,1,1,2) \cap Q^S \cap H^S \subset \mathbb{P}^{10}$. Toutes les extensions de Fano de S sont représentées sous la forme $X = Q \cap \mathbb{P}(1,1,1,1,2)$, où $Q = V(q) \subset \mathbb{P}^{10}$ est une quadrique donnée par $q = h^S l(t, x_{ij}) + t_0 q^S$ (h^S est la forme linéaire associée à H^S et $l(t, x_{ij})$ est une forme linéaire de $\mathbb{P}^{10}$). Ainsi $\mathcal{F}_S^R \subset [\mathbb{A}^{12}/\mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a]$ est un ouvert correspondant aux intersections complètes lisses et $\mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a$ est le sous-groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^{10}$ fixant H^S point par point et laissant $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ invariant, l'action étant la suivante :

$$\mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a \ni (\lambda, \mu) : (t, x_{ij}) \mapsto (\lambda t + \mu h^S, \lambda x_{ij}).$$

□

Famille de degré $(-K_X)^3 = 24$

Les variétés de Fano de cette famille sont les cubiques lisses $X = V(f_3) \subset \mathbb{P}^4$.

Proposition 5.2.11. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface K3 contenue dans X en tant que diviseur anticanonique, alors $S = X \cap Q \subset \mathbb{P}^4$, où Q est une quadrique, et $S \in K_6$. Les surfaces K3 obtenues comme une intersection complète d'une quadrique et d'une cubique sont génériques dans K_6.*

(ii) Si on fixe une surface K3 $S = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^4$ dans K_6, le champ de modules $\mathcal{F}_S^R$ est un ouvert B de l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{I}_S \otimes O(3))) = \mathbb{P}^5$.

Démonstration. (i) : On a $K_X - 2H = -2O_X(2) \in \mathrm{Pic}\,(X)$. Soit $S \in |-K_X| = |2H|$. D'après la proposition 5.1.4, X est projectivement normale. Donc $S = Q \cap X = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^4$, où $Q = V(q) \subset \mathbb{P}^4$ est une quadrique. Si S est lisse, c'est une surface $K3$ primitivement polarisée par H de degré 6. Elle appartient à l'espace de modules K_6.

Soit S une surface $K3$ générique de K_6. Alors $\mathrm{Pic}\,(S) = \mathbb{Z}[H]$ avec $H^2 = 6$, donc d'après Saint-Donat, H est très ample. La proposition 5.1.10 dit alors que l'image du plongement $\phi_H : S \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ est une intersection complète d'une quadrique et d'une cubique.

(ii) : Fixons maintenant $S = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^4$ dans K_6. Si S est générique, $\mathrm{Pic}\,(S) = NS^1(S) = \mathbb{Z}[H]$ est de rang un. On a $S = V(f_3, q) \subset X' = V(f_3')$ si et seulement si $f_3' = \lambda f_3 + lq$, où $l \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_4]$ est une forme linéaire et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les cubiques $X_t = V(f_{3t}) \subset \mathbb{P}^4$ contenant S sont donc paramétrées par $t = [t_0, \ldots, t_5] \in \mathbb{P}^5$ avec $f_{3t} = t_0 f_3 + (t_1 x_0 + \ldots + t_5 x_4)q$. On obtient la famille complète des cubiques de $\mathbb{P}^4$ contenant S, qui est donnée par

$$f : \mathcal{X} = V(f_{3t}) \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^4 \to \mathbb{P}^5,$$

où pour $t \in \mathbb{P}^5$, $X_t = V(f_{3t}) \subset \mathbb{P}^4$ contient S. Soit $B \subset \mathbb{P}^5$ l'ouvert de lissité de f. Un isomorphisme entre X_t et X_s, $t \in B$, $s \in B$, qui fixe S point par point, se relève en un automorphisme $PGL(5)$ de $\mathbb{P}^4$ qui fixe S point par point, car cet isomorphisme envoie $H_t \in \mathrm{Pic}\,(X_t)$ sur $H_s \in \mathrm{Pic}\,(X_s)$. Comme $\langle S \rangle = \mathbb{P}^4$, il n'y a pas d'automorphisme de $\mathbb{P}^4$ non trivial qui fixe S point par point. Donc $X_t = X_s \subset \mathbb{P}^4$. Ainsi $B = F_S^R$ est l'espace de modules du champ $\mathcal{F}_S^R$ et $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ est la famille universelle associée. □

Famille de degré $(-K_X)^3 = 32$

Les variétés de Fano sont les intersections complètes lisses $X = Q_1 \cap Q_2 = V(q_1, q_2) \subset \mathbb{P}^5$ de deux quadriques, et la surface $K3$ $S = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \subset \mathbb{P}^5$ est une intersection complète lisse de trois quadriques.

Proposition 5.2.12. *Supposons S générique. Alors l'espace de modules $\mathcal{F}_S^R$ est un ouvert B de $\mathbb{P}^2$, et la jacobienne intermédiaire relative de la famille universelle $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ admet une compactification symplectique $h : \overline{\mathcal{J}}_{2,S} \to \mathbb{P}^2$, dans laquelle $\overline{\mathcal{J}}_{2,S}$ est un espace de modules de faisceaux de torsion sur une autre surface $K3$ $\hat{S}$ associée à S, et h est l'application du support.*

Démonstration.

Les trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 engendrent un réseau de quadriques $W = \mathbb{P}^2$, et S est le lieu des points de base de W. Les intersections complètes X de deux quadriques contenant S sont les lieux de base des pinceaux de quadriques, contenus dans le réseau W, et correspondent donc aux droites du plan W, c'est à dire aux points du plan dual W^*. On note par B la partie ouverte de $W^* \simeq \mathbb{P}^2$ paramétrant les intersections complètes lisses. Du fait que S est générique, ni S, ni aucune des variétés de Fano X paramétrées par B n'a d'automorphismes non triviaux. Donc B représente le champ de modules $\mathcal{F}_S^R$, et les variétés X_L, $L \in B$, forment une famille universelle $\mathcal{X}_B \to B$ des extensions de Fano de S.

Soit maintenant $L \in B$ une droite de W, et X_L l'extension de Fano de S correspondante. D'après Narasimhan–Ramanan [57], la jacobienne intermédiaire $J(X_L)$ est canoniquement isomorphe à la jacobienne d'une courbe C_L de genre 2 associée à X_L. Cette courbe est définie par le revêtement double de L apparaissant dans la factorisation de Stein $F_2(\mathcal{Q}_L/L) \to C_L \xrightarrow{2:1} L \simeq \mathbb{P}^1$, où $F_2(\mathcal{Q}_L/L) \to L$ désigne la famille des plans $\mathbb{P}^2$ contenus dans les quadriques de dimension 4 qui sont les fibres du pinceau de quadriques $\mathcal{Q}_L/L$ (voir aussi [58] pour l'interprétation de X_L comme un espace de modules de fibrés vectoriels sur C_L et [67] pour une généralisation aux quadriques de dimension quelconque).

On peut relativiser ce résultat classique sur toute la famille des variétés X_L à la fois de façon évidente : on définit la surface $\hat{S}$ par le revêtement double apparaissant dans la factorisation de Stein $F(\mathcal{Q}_W/W) \to \hat{S} \xrightarrow{2:1} W$ de la famille relative $F_2(\mathcal{Q}_W/W)$ des plans dans les quadriques du réseau Q_W/W. Pour un point $w \in W$ représentant une quadrique lisse Q_w, le schéma de Fano $F(Q_w)$ des plans dans Q_w est formé de deux composantes disjointes isomorphes à $\mathbb{P}^3$, et si w appartient à la courbe discriminante $\Delta_W \subset W$, qui paramètre les quadriques singulières du réseau, $F(Q_w)$ est connexe. L'hypothèse de généricité de S, et donc de Q_W/W, entraîne, que Δ est une sextique lisse de W et que Q_w est un cône quadratique non dégénéré, de sorte que $F(Q_w)$ est une seule copie de $\mathbb{P}^3$, pour tout $w \in \Delta$. La surface $\hat{S}$ est dans ce cas une surface K3 revêtement double du plan $W \simeq \mathbb{P}^2$ ramifié en la courbe sextique lisse Δ. Notons $\eta : \hat{S} \xrightarrow{2:1} W$ ce revêtement double.

Les courbes $C_L = \eta^{-1}(L)$, lorsque L parcourt les droites de W, forment le système linéaire complet $\mathcal{C} \to |C| = W^* \simeq \mathbb{P}^2$, où on a noté par C une de ces courbes, et on a l'isomorphisme canonique $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}_{2,S} = \mathcal{J}(\mathcal{C}_B/B)$, où la première jacobienne est la jacobienne intermédiaire relative, et la seconde est la jacobienne relative de la famille de courbes lisses $\mathcal{C}_B \to B$. Cette dernière jacobienne est un espace de modules relatif de faisceaux sans torsion de rang 1 sur les fibres de la famille $\mathcal{C}_B/B$. Puisque c'est une famille de courbes dans $\hat{S}$, par la propriété universelle de l'espace de modules, il existe un morphisme naturel de $\mathcal{J}(\mathcal{C}_B/B)$ vers un espace de modules de faisceaux de dimension pure 1 sur $\hat{S}$, qui n'est autre que $M_{\hat{S}}^C(0, [C], -1)$. Le choix du réseau de quadriques W étant générique, toutes les courbes de $|C|$ sont irréductibles, et le second espace de modules est lisse à cause de l'absence de faisceaux strictement semistables. Puisque le morphisme entre les deux espaces de modules est bijectif, et que le second espace de modules est lisse, le morphisme est un isomorphisme. La projection sur W^* est la fibration lagrangienne naturelle donnée par l'application du support d'un faisceau. On a obtenu, de cette façon, une compactification naturelle de la fibration lagrangienne de jacobiennes intermédiaires :

$$h : \overline{\mathcal{J}}_{2,S} = M_{\hat{S}}^C(0, [C], -1) \to W^* \simeq \mathbb{P}^2, \quad [\mathcal{L}] \mapsto \operatorname{Supp} \mathcal{L}.$$

Remarquons qu'ici $\overline{\mathcal{J}}_{2,S}$ est une variété symplectique irréductible lisse, équivalente par déformations à $S^{[2]}$.

□

Famille de degré $(-K_X)^3 = 40$

Il n'y a qu'une seule classe d'isomorphisme de variétés de Fano, d'indice 2, de nombre de Picard 1 et de degré 5. C'est une section $X = \Lambda_6 \cap \mathrm{Gr}\,(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ de la grassmannienne $\mathrm{Gr}\,(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ par trois hyperplans. Dans ce cas $h^{2,1}(X) = 0$, par conséquent il n'y a pas d'intérêt à l'étudier.

5.2.3 Variétés de Fano d'indice $r = 3$ ou 4

Famille de degré $(-K_X)^3 = 54$

Il n'y a qu'une seule classe d'isomorphisme de variétés de Fano d'indice 3 : c'est une quadrique lisse de $\mathbb{P}^4$, dont la jacobienne intermédiaire est nulle ; par conséquent, il n'y a pas d'intérêt à l'étudier.

Famille de degré $(-K_X)^3 = 64$

Il n'y a qu'une seule variété de Fano d'indice 4 : c'est l'espace projectif $\mathbb{P}^3$, et sa jacobienne intermédiaire est nulle.

5.3 Variétés de Fano de nombre de Picard ≥ 2

5.3.1 Les éclatés de $\mathbb{P}^3$ en une courbe lisse connexe

Dans ce paragraphe, on considère les éclatés X de $\mathbb{P}^3$ en une courbe lisse connexe C. On note $\epsilon : \tilde{\mathbb{P}}^3_C \to \mathbb{P}^3$ le morphisme d'éclatement, $\mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C)$ le schéma de Hilbert de $\mathbb{P}^3$ dans lequel varie la courbe C et $\mathcal{C} \subset \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C) \times \mathbb{P}^3$ la correspondance d'incidence. Soit r un entier positif et $p : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^3$ la projection, de sorte que, pour toute courbe $C' \in \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C)$, le morphisme d'éclatement se factorise par $\epsilon : \tilde{\mathbb{P}}^3_{C'} \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r \xrightarrow{p} \mathbb{P}^3$ (cf. lemme 5.1.7).

Lemme 5.3.1.

(i) Un isomorphisme $\phi : X = \tilde{\mathbb{P}^3}_C \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C'}$, où $C \subset \mathbb{P}^3$ et $C' \subset \mathbb{P}^3$ sont des courbes connexes lisses qui ne sont pas des sextiques de genre 3, descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de $\mathbb{P}^3$ tel que $\phi(C) = C'$, c'est à dire que les contractions $\epsilon : X \to \mathbb{P}^3$ et $\epsilon' \circ \phi : X \to \mathbb{P}^3$ sont équivalentes, $\epsilon : X \to \mathbb{P}^3$ et $\epsilon' : X' \to \mathbb{P}^3$ désignant les éclatements de départ de centres C, C' respectivement.

(ii) L'assertion du point (i) est encore vrai si C est une sextique de genre 3, sous l'hypothèse supplémentaire que X contienne un diviseur anticanonique lisse S tel que ϵ et $\epsilon' \circ \phi$ induisent un isomorphisme de S sur son image.

Démonstration. Cette question d'unicité de représentation d'une variété de Fano comme l'éclatement d'une autre variété de Fano à nombre de Picard plus petit se pose pour plusieurs entrées des tables de Mori-Mukai. Ces tables contiennent effectivement la réponse : la dernière colonne des tables 2-4 de [46] donne la liste des autres variétés de Fano, dans lesquelles on peut éclater une courbe pour obtenir la variété en question, chaque variété étant répétée autant de fois qu'il existe d'éclatements non-équivalents. En scrutant la dernière colonne des tables 2-4, on aperçoit que seulement l'éclaté $\mathbb{P}^3$ en une sextique de genre 3 admet deux contractions non équivalentes sur $\mathbb{P}^3$, et dans ce cas on recourt à l'invariance de S. Puisqu'on ne trouve pas la démonstration de cette assertion dans [46], nous donnons les détails de cette démonstration ici. En fait, ce type de raisonnement, bien qu'on ne le trouve pas dans la littérature en l'application à $\mathbb{P}^3$, a été utilisé par plusieurs auteurs pour l'étude d'isomorphismes birationnels entre des variétés de Fano, voir par exemple, [73], [64]. Nous donnons une démonstration détaillée pour $\mathbb{P}^3$, et dans les autres cas ou bien nous indiquons des modifications à faire lorsqu'on applique la même méthode, ou bien nous mentionnons la référence au résultat de Mori-Mukai.
(i) Soit donc $\epsilon_1 : X \to \mathbb{P}^3$ et $\epsilon_2 : X \to \mathbb{P}^3$ deux contractions non équivalentes qui contractent deux diviseurs exceptionnels distincts E_1 et E_2 sur deux courbes connexes lisses C_1 et C_2 respectivement. La variété X contient alors :

— les classes amples $H_i = \epsilon_i^* c_1(O_{\mathbb{P}^3}(1))$, $i = 1, 2$, et
— deux diviseurs $E_i = \epsilon^{-1}(C_i)$, $i = 1, 2$,

qui sont tous les deux des surfaces réglées lisses admettant des fibrations $E_1 \to C_1$, $E_2 \to C_2$ de fibres générales f_1, respectivement f_2. Ces fibres satisfont aux propriétés $f_1 \simeq f_2 \simeq \mathbb{P}^1$, $K_X \cdot f_i = -1$, $H_i \cdot f_i = 0$, $E_i \cdot f_i = -1$.

Ainsi $-K_X = 4H_1 - E_1 = 4H_2 - E_2 \in \mathrm{Pic}\,(X)$. On a les formules suivantes :

$$E_i^2 = -\epsilon_i^* C_i + (\deg N_{C_i/\mathbb{P}^3}) f_i,$$

$$-E_i^3 = \deg\, N_{C_i/\mathbb{P}^3} = 2g(C_i) - 2 + 4\deg(C_i).$$

On calcule :

$$-K_X^3 = (4H_i - E_i)^3 = 64 - 8\deg(C_i) + 2g(C_i) - 2.$$

Puisque $h^{1,2}(X) = g(C_i)$, on en déduit que

$$g(C_1) = g(C_2) = g, \quad \deg(C_1) = \deg(C_2) = d.$$

Puisque $\mathrm{Pic}\,(X) = \mathbb{Z}[H_i] \oplus [E_i]$ $(i = 1, 2)$, il existe $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} H_2 & = kH_1 - lE_1 \\ E_2 & = mH_1 - nE_1. \end{cases}$$

De plus, on a $k, l, m, n > 0$. En fait, $l > 0$, car $l = H_2 \cdot f_1 = \deg(\epsilon_2(f_1))$, et alors $k > 0$, car dans le cas contraire H_2 ne serait pas effectif. Puis $n = f_1 \cdot E_2 \geq 0$, car f_1 n'est pas contenu dans E_2, et alors $m > 0$ par l'effectivité de E_2. Puisque (H_1, E_1) et (H_2, E_2) sont deux bases du même réseau, on a $kn - ml = \pm 1$. On en conclut que

$$\begin{cases} H_1 & = nH_2 - lE_2 \\ E_1 & = mH_2 - kE_2 \end{cases}$$

et $kn - ml = 1$. Finalement, on a :
- $-1 = K_X \cdot f_1 = (-4H_2 + E_2) \cdot f_1 = -4l + n$, d'où $n = 4l - 1 > 0$,
- $-1 = K_X \cdot f_2 = (-4H_1 + E_1) \cdot f_2$ donne $k = 4l - 1 > 0$,
- $m = 16l - 8 > 0$.

En exprimant la relation $H_2^2 \cdot E_2 = 0$ en fonction de H_1 et de E_1, on obtient :

$$0 = H_2^2 \cdot E_2 = (kH_1 - lE_1)^2 \cdot (mH_1 - nE_1) = k^2m - l(2k^2 + ml)d + 2kl^2\nu, \tag{5.3.1}$$

où on a noté $2\nu = 2g - 2 + 4d$. Donc l divise k^2m. On a $k = 4l - 1$, donc k et l sont premiers entre eux et l divise $m = 16l - 8$. D'où $l \in \{1, 2, 4, 8\}$. On utilise maintenant la relation $H_2^3 = 1$:

$$1 = H_2^3 = (kH_1 - lE_1)^3 = k^3 - 3kl^2d + 2l^3\nu. \tag{5.3.2}$$

Si 2 divise l, alors (5.3.2) entraîne que $k^3 \equiv 1 \mod 4$, ce qui est faux puisque $k = 4l - 1 \equiv -1 \mod 4$. On en conclut que la seule valeur possible est $l = 1$. Ainsi $l = 1$, $k = 3$, $n = 3$ et $m = 8$. L'équation (5.3.2) devient $1 = 27 - 5d + 2g - 2$, d'où $g = \frac{5}{2}d - 12$. Remarquons maintenant que les relations $H_1 \cdot f_2 = l = 1$, $E_1 \cdot f_2 = 4l - 1 = 3$ entraînent que la famille des courbes $\epsilon_1(f_2)$ est celle des droites trisécantes à C_1. D'après la géométrie énumérative [30], une courbe lisse de $\mathbb{P}^3$ possède un nombre de quadrisécantes, le degré de la classe virtuelle des quadrisécantes dans la grassmannienne $\mathrm{Gr}\,(2, 4)$ étant $\frac{1}{12}(d-2)(d-3)^2(d-4) - \frac{1}{2}g(d^2 - 7d + 13 - g)$. D'après [13], les quadrisécantes de C_1 feraient partie du lieu singulier de la surface des trisécantes $\epsilon_1(E_2)$. Donc l'existence de quadrisécantes contredirait le fait que E_2 est lisse et que, par conséquent, $\epsilon_1(E_2)$ ne peut pas avoir de singularités en dehors de C_1. En injectant $g = \frac{5}{2}d - 12$ dans la formule du nombre des quadrisécantes, on obtient un polynôme de degré 4 en d qui n'a que deux racines réelles $d_1 = 6$ et $d_2 \approx 9{,}8514$. Donc le seul cas, où C_1 n'a pas de quadrisécantes et la surface balayée par les trisécantes est non singulière en dehors de C_1, est le cas $d = 6$ et $g = 3$.

(ii) Supposons de plus que X contienne une surface $K3$ S et que ϵ_i induise des isomorphismes de S sur les images $\epsilon_i(S) = S_{0,i}$, $i = 1, 2$. On remarque alors que ϵ_2 contracte les trisécantes de C_1 et donc $S_{0,2}$ a des self-intersections triples, ce qui est absurde.

□

Proposition 5.3.2. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface $K3$ diviseur anticanonique de $X = \tilde{\mathbb{P}}^3_C$, alors $S_0 = \epsilon(S) = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ est une quartique qui contient C.*

(ii) Soient S_0 une quartique lisse de $\mathbb{P}^3$ contenant C et $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ le sous-réseau de $\mathrm{Pic}\,(S_0)$ engendré par $H = c_1(O_S(1))$ et $[C]$, ayant pour forme d'intersection $\begin{pmatrix} 4 & d_C \\ d_C & 2g_C - 2 \end{pmatrix}$. Alors on a $\mathrm{Pic}\,(S_0) = R$ pour une quartique S_0 très générale contenant C. Une surface $K3$ générique dans l'espace de modules K_4^R s'obtient comme une quartique lisse contenant une courbe lisse connexe C' équivalente par déformations à C.

(iii) Dans une quartique lisse S_0 contenant C, générique dans K_4^R, les courbes du même type que C contenues dans S_0 varient suivant les cas soit dans un seul système linéaire $|C|_{S_0}$, soit dans deux systèmes linéaires différents $|C|_{S_0}$ et $|C'|_{S_0}$.

Fixons une quartique $K3$ $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant C, générique dans K_4^R de sorte qu'elle vérifie à la propriété du (iii). Soit $S \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r$ le transformé strict de S_0, de sorte que p induit l'isomorphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_0$. Alors :

(iv) l'espace de modules $F_S^R = B$ est un ouvert de $\mathbb{P}^{g_C} = |C|_{S_0}$, respectivement de $\mathbb{P}^{g_C} \sqcup \mathbb{P}^{g_C} = |C|_{S_0} \sqcup |C'|_{S_0}$,

(v) la jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$, de la famille universelle $f : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique, s'identifie à la restriction au-dessus de B de la fibration lagrangienne $h : M_{S_0}^H(0, [C], 1 - g_C) \to \mathbb{P}^{g_C}$, respectivement $h : M_{S_0}^H(0, [C], 1 - g_C) \sqcup M_{S_0}^H(0, [C'], 1 - g_C) \to \mathbb{P}^{g_C} \sqcup \mathbb{P}^{g_C}$.

Démonstration. Dans toute la démonstration, le diviseur exceptionnel de $\tilde{\mathbb{P}}^3_C$ est désigné par la lettre E, et par H la classe d'un hyperplan de $\mathbb{P}^3$.

(i) : Soit S une surface $K3$ de $|-K_X|_X$. Puisque S est irréductible, la proposition 5.1.6 (ii) dit que la courbe C est contenue dans l'image $S_0 = \epsilon(S)$, et comme $\mathbb{P}^3$ est d'indice $r = 4$, S_0 est une quartique.

(ii) : La première assertion suit du théorème de Beauville ([6]), qui dit que le morphisme $s^R : \mathcal{F}^R \to K_4^R$ est génériquement surjectif, donc les surfaces $K3$ très générales de K_4^R, celles de nombre de Picard 2, ont bien une intersection non vide avec l'image de ce morphisme. La deuxième assertion suit du fait que les propriétés :

— la classe $[H]$ est ample, et

— la classe $[C]$ est représentée par une courbe lisse connexe,

sont ouvertes pour la topologie de Zariski dans toute déformation de S préservant l'algébricité des classes $[H]$ et $[C]$.

(iii) : Ce point sera traité famille par famille.

Famille 4 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique $K3$ contenant une intersection complète lisse de deux cubiques $C = V(f_3', f_3'') \subset \mathbb{P}^3$. On a $C = V(f_3', f_3'') \subset S_0 = V(f_4)$ si et seulement si $f_4 = f_3'h' + f_3''h''$, où h' et h'' sont deux formes linéaires de S_3^1. Alors, si on note $K' = V(f_3')$, on a

$$K' \cap S_0 = C \cup (K' \cap H'') = C \cup C',$$

où $C' = V(h'', f_3') \subset H'' = V(h'') \subset \mathbb{P}^3$ est une cubique plane. D'où $3H = [C] + [C'] \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. De plus, $H'' \cap S_0 = C' \cup l$, où $l = V(h', h'') \subset \mathbb{P}^3$ est une droite. Ainsi, on obtient $H = [C'] + [l] \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Les intersections dans S_0 sont $C \cdot C' = 3H \cdot C' = 9$, $l \cdot C' = H \cdot C' = 3$, $l \cdot C = 0$, $H^2 = 4$, $H \cdot C = 9$, $H \cdot C' = 3$, $H \cdot l = 1$, $C^2 = 18$, $C'^2 = 0$, $l^2 = -2$.

Si S_0 est générique dans K_4^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. La courbe C est lisse de genre $g(C) = 10$ donc, d'après la section 1.2, $\dim(|C|_{S_0}) = 10$. La quartique $K3$ S_0 contient une droite l, un unique pinceau elliptique $|C_s'|_{S_0}$ de degré 3 dans lequel varie la courbe C' et un unique système linéaire de courbes $|C_t|_{S_0}$ de genre 10 et de degré 9 dans lequel varie la courbe C, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 &= 18 \\ (aH + bC) \cdot H &= 9 \end{cases}$$

n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0, 1)$.

Famille 9 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique $K3$ contenant une courbe lisse de genre 5 et de degré 7, qui est une intersection de cubiques. Si S_0 est générique dans K_4^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. La courbe C est lisse de genre 5, d'après le chapitre 4, $\dim(|C|_{S_0}) = 5$. Il n'y a qu'un seul système linéaire de courbes de genre 5 et de degré 7, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 &= 8 \\ (aH + bC) \cdot H &= 7 \end{cases}$$

admet une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0, 1)$.

Famille 12 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique $K3$ contenant une courbe lisse de genre 3 et de degré 6 qui est une intersection de cubiques. Si S_0 est générique dans K_4^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. La courbe C est lisse de genre 3, et d'après le chapitre 4, $\dim(|C|_{S_0}) = 3$. Il n'y a qu'un seul système linéaire de courbes de genre 3 et de degré 6, car le système

$$\begin{cases} (aH+bC)^2 & = 4 \\ (aH+bC)\cdot H & = 6 \end{cases}$$

admet une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0,1)$.

Famille 15 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique $K3$ contenant une courbe lisse $C = V(q, f_3) = Q \cap K \subset \mathbb{P}^3$. Elle est primitivement polarisée par la classe ample $H = O_{S_0}(1)$. On a $C = V(q, f_3) \subset S_0 = V(f_4)$ si et seulement si $f_4 = qq' + l_0 f_3$, où $q' \in S_3^2$ est une forme quadratique et $l_0 \in S_3^1$ est une forme linéaire. Notons $H_0 = V(l_0) \subset \mathbb{P}^3$ l'hyperplan associé. Alors

$$Q \cap S_0 = (H_0 \cap Q) \cup (K \cap Q) = C_0 \cup C,$$

où $C_0 = H_0 \cap Q \subset \mathbb{P}^3$ est une conique avec $\langle C_0 \rangle = H_0$. Ainsi $[C] + [C_0] = 2H \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. De plus, $H_0 \cap S_0 = (Q \cap H_0) \cup (Q' \cap H_0) = C_0 \cup C_0'$. La quartique $K3$ S_0 contient donc deux coniques C_0 et C_0' avec $[C_0] + [C_0'] = H \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Puisque $\langle C_0 \rangle = \langle C_0' \rangle = H_0$, $C_0 \cap C_0' = \{4 \text{ points }\}$, donc $(C_0 \cdot C_0')_{S_0} = 4$. Les intersections dans S_0 sont $H^2 = 4$, $H \cdot C = 6$, $C^2 = 2g(C) - 2 = 6$, $H \cdot C_0 = H \cdot C_0' = 2$, $C_0^2 = -2$, ${C_0'}^2 = -2$, $C_0 \cdot C_0' = (H - C_0') \cdot C_0' = 4$, $C \cdot C_0 = (2H - C_0) \cdot C_0 = 2$, $C \cdot C_0' = (2H - C_0) \cdot C_0' = 0$. Puisque $C \cdot C_0 = 2$, $C \cdot C_0' = 0$, on a $C_t \cap C_0 = \{2 \text{ points }\}$, $C_t \cap C_0' = \emptyset$ pour $C_t \in |C|$ générique.

Si S_0 est générique dans K_4^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. La courbe C est lisse de genre $g(C) = 4$, donc $\dim(|C|_{S_0}) = 4$. La quartique $K3$ S_0 contient deux coniques C_0 et C_0' et un unique système linéaire de courbes C_t de genre 4 et de degré 6, car le système

$$\begin{cases} (aH+bC)^2 & = 6 \\ (aH+bC)\cdot H & = 6 \end{cases}$$

n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0,1)$.

Famille 25 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique $K3$ contenant une courbe elliptique $C = V(q_1, q_2) \subset \mathbb{P}^3$, qui est une intersection complète lisse de deux quadriques. Elle appartient à K_4 et est primitivement polarisée par la classe H de degré 4. On a $C \subset S_0$ si et seulement si $f_4 = q_3 q_1 + q_4 q_2$, où q_3 et q_4 sont des formes quadratiques de S_3^2. Alors

$$Q_1 \cap S_0 = (Q_1 \cap Q_2) \cup (Q_1 \cap Q_4) = C \cup C'.$$

Ainsi $2H = [C] + [C'] \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Les intersections dans S_0 sont : $H^2 = 4$, $\;H \cdot C = H \cdot C' = 4$, $\;C^2 = C'^2 = 0$, $C \cdot C' = C \cdot (2H - C) = 8$.

Si S_0 est générique dans K_4^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. La courbe C est lisse de genre $g(C) = 1$, donc $\dim(|C|_{S_0}) = 1$. La quartique $K3$ S_0 contient alors exactement deux pinceaux elliptiques de degré 4, car le système

$$\begin{cases} (aH+bC)^2 & = 0 \\ (aH+bC)\cdot H & = 4 \end{cases}$$

admet deux solutions dans $\mathbb{Z}^2$, qui sont $(0,1)$ et $(2,-1)$.

Famille 28 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique $K3$ contenant une cubique plane lisse $C = V(f_3, h) = H \cap K$. Elle appartient à K_4 et est primitivement polarisée par la classe H de degré 4. On a $C \subset S_0$ si et seulement si $f_4 = hg_3 + h' f_3$. Alors $H \cap S_0 = C \cup l$, où $l = V(h, h') \subset \mathbb{P}^3$ est une droite. Ainsi $H = [C] + [l] \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Pour $t \in \mathbb{P}^1 \subset \mathrm{Gr}\,(3,4)$ paramétrant les hyperplans H_t tels que $l \subset H_t \subset \mathbb{P}^3$, $H_t \cap S_0 = C_t \cup l$. Ainsi $H = [C_t] + [l]$ dans $\mathrm{Pic}\,(S_0)$. La surface $K3$ S_0 contient une droite l et un pinceau elliptique C_t, $t \in \mathbb{P}^1$, de degré 3, dans lequel varie la courbe C. Les intersections dans S_0 sont $H^2 = 4$, $H \cdot C = 3$, $H \cdot l = 1$, $C^2 = 0$, $l^2 = -2$, $C \cdot l = (H - l) \cdot l = 3$.

Si S_0 est générique dans K_4^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. La courbe C est lisse de genre $g(C) = 1$, donc $\dim(|C|_{S_0}) = 1$. La quartique $K3$ S_0 contient un unique pinceau elliptique de degré 3, car le système

$$\begin{cases} (aH+bC)^2 & = 0 \\ (aH+bC)\cdot H & = 3 \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0,1)$.

Maintenant fixons une quartique lisse $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant C. Alors S_0 appartient à K_4^R. Supposons S_0 générique dans K_4^R, de sorte que $\mathrm{Pic}\,(S_0) = R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est de rang 2 et satisfait donc à la propriété du (iii). Soit $S \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r$ le transformé strict de S_0, de sorte que p induit un isomorphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_0$. Comme le raisonnement suivant est identique dans le cas où la courbe C varie dans S_0 dans un ou deux pinceaux (i.e. $\mathbb{P}^{g_C}$ ou $\mathbb{P}^{g_C} \sqcup \mathbb{P}^{g_C}$), on écrira les points (iv) et (v) dans le cas d'un seul pinceau.

(iv) : Soit X une extension de Fano de S. Ainsi $X = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C'}$ contient S en tant que diviseur anticanonique. D'après la proposition 5.1.6 (ii), $S_0 = \epsilon(S)$ contient C'. La famille

$$f : \mathcal{X} = (\widetilde{\mathbb{P}^{g_C} \times \mathbb{P}^3})_{\mathcal{C}_{S_0}} \to \mathbb{P}^{g_C},$$

où $\mathcal{C}_{S_0} = \mathcal{C} \cap (\mathbb{P}^{g_C} \times S_0)$ est la correspondance d'incidence, contient donc toutes les extensions de Fano de S. La fibre de f au-dessus de $t \in \mathbb{P}^{g_C}$ est l'éclaté $X_t = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C_t}$ de $\mathbb{P}^3$ en C_t qui contient S en tant que diviseur anticanonique (cf. proposition 5.1.6 (iii)). Soit $B \subset \mathbb{P}^{g_C}$ l'ouvert des $t \in \mathbb{P}^{g_C}$ tels que C_t est lisse. On a ainsi un morphisme surjectif de champs algébriques $r : B \to \mathcal{F}_S^R$.

Puisque $\dim \mathcal{F}_S^R = h^{1,2}(X) = g(C) = \dim |C|_{S_0}$, le morphisme r est génériquement fini. Montrons que r est étale. Pour cela, puisque $\dim \mathcal{F}_S^R = \dim B$, il suffit de montrer que la différentielle de r en un point $t \in B$ est injective. On montrera que la différentielle du morphisme composé $(B,t) \to \mathcal{F}^R_{S\,|(B,t)} \to \mathrm{Def}\,(X_t)$ est injective. D'après la proposition 5.1.8, il s'agit de montrer que T_tB s'injecte dans $H^0(C_t, \mathcal{N}_{C_t/\mathbb{P}^3})/\alpha(H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}))$. L'image de α paramètre les déformations infinitésimales de premier ordre de C_t, correspondant à l'action infinitésimale de $PGL(4)$. Or S_0 n'a pas d'automorphismes infinitésimaux, car $H^0(S_0, T_{S_0}) = 0$, donc aucune déformation infinitésimale de C_t donnée par un élément de l'image de α n'est contenue dans S_0. Il en résulte que $|C|_{S_0}$ est transverse à l'action de $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{P}^3)$, ce qui donne l'injection désirée.

Il reste à montrer que le morphisme r est injectif. Soit $\phi : X_t \xrightarrow{\sim} X_{t'}$ un isomorphisme qui transforme S en S et fixe R. On note par ϵ, ϵ' les contractions $X \to \mathbb{P}^3$ inverses aux éclatements de centes C_t, $C_{t'}$ respectivement. Alors, d'après le lemme 5.3.1, ϕ descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de $\mathbb{P}^3$, tel que $\phi \circ \epsilon' = \epsilon \circ \overline{\phi}$ et $\overline{\phi}(C_t) = C_{t'}$. Il s'ensuit que $\epsilon(S)$ et $\epsilon'(S)$ est la même quartique K3 S_0 de $\mathbb{P}^3$, contenant C_t, $C_{t'}$ et invariante par $\overline{\phi}$.

Il suffit donc de voir qu'un automorphisme linéaire de $\mathbb{P}^3$ qui transforme S_0 dans S_0 et induit l'identité sur R, sous l'hypothèse que S_0 est générique dans K_4^R, induit aussi l'identité sur S_0. On peut vérifier cette assertion cas par cas par des arguments très élémentaires. Prenons, par exemple, les cas des familles 4 et 28, dans lesquels le réseau R est le même (ces cas diffèrent par l'image de $-K_X$ dans R). On suppose donc qu'il existe un automorphisme $\overline{\phi}$ de $\mathbb{P}^3$ qui induit sur S_0 un automorphisme, différent de id_{S_0}. La surface S_0 contient une unique droite l, donc la linéarité de $\overline{\phi}$ entraîne que l est invariante par $\overline{\phi}$ et, donc, $\overline{\phi}$ fixe R automatiquement.

Il est bien connu que le groupe des automorphismes d'une surface K3 polarisée préservant la polarisation est fini, voir, par exemple, [59]. Puis, $\langle S_0 \rangle = \mathbb{P}^3$, donc $\overline{\phi} = \mathrm{id}$ si et seulement si $\overline{\phi}|_{S_0} = \mathrm{id}_{S_0}$. Donc $\overline{\phi}$ est d'ordre fini et peut être diagonalisé.

Plus précisément, on peut relever $\overline{\phi}$ à un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, dont le projectivisé est $\mathbb{P}^3$, et choisir une base $e_0, \ldots, e_3$ de $\mathbb{C}^4$, dans laquelle $\overline{\phi}$ s'écrit par la matrice diagonale aux éléments diagonaux $\alpha_0, \ldots, \alpha_3$ qui sont des racines de 1. De plus, on peut supposer que e_0, e_1 forment une base du plan vectoriel L correspondant à la droite projective l et que la forme quartique f définissant S_0 est fixée par $\overline{\phi}$.

Si e_0, e_1 sont des vecteurs propres de $\overline{\phi}$ aux valeurs propres distinctes, alors la déformation de f à 1 paramètre $f_t = f + t(x_0 + x_1)x_0^3$ n'admet pas de déformation de $\overline{\phi}$ en un automorphisme linéaire ψ_t de $S_t = V(f_t)$ pour t générique. Si e_0, e_1 sont tous les deux propres avec la même valeurs propre, alors il existe un vecteur propre de valeur propre différente, que l'on peut supposer être e_3, et le pinceau de quartiques $f_t = f + t(x_0^4 + x_1^3 x_3)$ n'admet pas de déformation de $\overline{\phi}$. Donc la quartique générique contenant l, que l'on peut donner par l'équation $x_0 g_3 + x_1 f_3 = 0$, où f_3, g_3 sont des formes cubiques génériques, n'a pas d'automorphismes linéaires non triviaux. Les familles 9, 12, 15, 25 peuvent être traitées par des arguments similaires.

On conclut que $\overline{\phi}$ fixe S_0 point par point. Donc, $C_t = C_{t'}$ et $X_t = X_{t'}$, ce qui montre que r est injectif. Ainsi r est un isomorphisme, c'est à dire $B = F_S^R$ est l'espace de modules du champ $\mathcal{F}_S^R$ et $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ est la famille universelle.

(v) : Notons $\epsilon : (\widetilde{\mathbb{P}^{g_C} \times \mathbb{P}^3})_{\mathcal{C}_{S_0}} \to \mathbb{P}^{g_C} \times \mathbb{P}^3$ le morphisme d'éclatement, $\mathcal{E} \subset (\widetilde{\mathbb{P}^{g_C} \times \mathbb{P}^3})_{\mathcal{C}_{S_0}}$ le diviseur exceptionnel, $i : \mathcal{E} \hookrightarrow (\widetilde{\mathbb{P}^{g_C} \times \mathbb{P}^3})_{\mathcal{C}_{S_0}}$ l'immersion fermée correspondante, $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ la projection et $h : \mathcal{C}_{S_0} \to \mathbb{P}^{g_C}$. On a le morphisme de faisceaux constructibles sur $\mathbb{P}^{g_C}$

$$i_*p^* : R^1h_*\mathbb{C} \to R^3f_*\mathbb{C},$$

pour $t \in B$, $J(X_t) = i_{t*}p_t^*J(C_t)$ où $i_t : E_t \hookrightarrow X_t$ est l'inclusion du diviseur exceptionnel et $p_t : E_t \to C_t$ est la projection induite par l'éclatement $\epsilon_t : X_t \to V$ car $J(\mathbb{P}^3) = 0$.
On a l' isomorphisme de variétés symplectiques lisses, non compactes

$$M_{S_0}^H(0, [C], 1 - g_C)_B \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B)$$

au-dessus de B donné par :
— l'isomorphisme d'espaces de modules $M_{S_0}^H(0, [C], 1 - g_C)_B \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}^0(\mathcal{C}_B/B)$;
— l'isomorphisme d'Abel-Jacobi relatif $\operatorname{Pic}^0(\mathcal{C}_B/B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_B^{1,0}/R^1h_*\mathbb{Z}$, où $h_B : \mathcal{C}_B \to B$;
— l'isomorphisme de fibrés de Hodge au-dessus de B

$$i_*p^* : \mathcal{H}_B^{1,0}/R^1h_{B*}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_B^{2,1}/R^3f_{B*}\mathbb{Z}.$$

On en conclut donc que $M_{S_0}^H(0, [C], 1 - g_C)$ est une compactification de $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B)$ et le morphisme du support $M_{S_0}^H(0, [C], 1 - g_C) \to |C|_{S_0} \simeq \mathbb{P}^{g_C}$ est une extension de la fibration lagrangienne $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$.

Rappelons au passage que l'on a une polarisation relative des variétés holomorphes $\mathcal{H}_B^{1,0}/R^1h_*\mathbb{Z}$ et $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B)$ qui en font des variétés algébriques. □

5.3.2 Les éclatés de $\mathbb{P}^3$ en une courbe lisse non connexe

Il n'y a qu'une seule famille rentrant dans ce cas. C'est la **famille 6 de nombre de Picard égal à 3**.

Les variétés de Fano sont les éclatés $X = \tilde{\mathbb{P}}_K^3$ de $\mathbb{P}^3$ en l'union $K = C \sqcup l$, où $C = Q \cap Q'$ est une intersection complète lisse de deux quadriques (c'est une courbe elliptique) et l est une droite. On note $\epsilon : X \to \mathbb{P}^3$ le morphisme d'éclatement, $\operatorname{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C)$ le schéma de Hilbert de $\mathbb{P}^3$ dans lequel varie la courbe C et $\mathcal{C} \subset \operatorname{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C) \times \mathbb{P}^3$ la correspondance d'incidence. On note $\operatorname{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C + 2)$ le schéma de Hilbert dans lequel varie la courbe K et $\mathcal{K} \subset \operatorname{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C + 2) \times \mathbb{P}^3$ la correspondance d'incidence. Soit r un entier positif et $p : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^3$ la projection, de sorte que, pour toute courbe $K' \in \operatorname{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C + 2)$, le morphisme d'éclatement se factorise par $\epsilon : \tilde{\mathbb{P}}_{K'}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r \xrightarrow{p} \mathbb{P}^3$ (cf. lemme 5.1.7).

Lemme 5.3.3. *Un isomorphisme $\phi : X = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C \sqcup l} \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C' \sqcup l}$, où $C \subset \mathbb{P}^3$ et $C' \subset \mathbb{P}^3$ sont des intersections complètes lisses de deux quadriques, descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de $\mathbb{P}^3$ tel que $\overline{\phi}(C) = C'$, c'est à dire que les contractions $\epsilon : X \to \mathbb{P}^3$ et $\epsilon' \circ \phi : X \to \mathbb{P}^3$ sont équivalentes, $\epsilon : X \to \mathbb{P}^3$ et $\epsilon' : X' \to \mathbb{P}^3$ désignant les morphismes d'éclatement.*

Démonstration.
Par des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du lemme 5.3.1, on vérifie qu'un isomorphisme $\phi : X \xrightarrow{\sim} X'$ non induit par un automorphisme de $\mathbb{P}^3$ envoie les fibres $\mathbb{P}^1$ du diviseur exceptionnel $E_1' \to C'$ sur les transformées strictes des trisécantes à C. Or C est une intersection de quadriques donc n'a aucune trisécante. □

Proposition 5.3.4. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface K3 diviseur anticanonique de $X = \tilde{\mathbb{P}}_K^3$, alors $S_0 = \epsilon(S) = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ est une quartique qui contient C et l.*

(ii) Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique K3 contenant $K = C \sqcup l$. Alors S_0 appartient à K_4^R, où le réseau $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C] \oplus \mathbb{Z}[l]$ est muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. De plus, S_0 contient trois pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$, $|C'|_{S_0}$ et $|C''|_{S_0}$, dont seul $|C|_{S_0}$ possède la propriété que ses membres ont une intersection vide avec l ou contiennent l. Une quartique K3 S_0 générique dans K_4^R s'obtient par cette construction et, pour une quartique K3 S_0 très générale contenant C et l, on a $\operatorname{Pic}(S_0) = R$.

(iii) Pour un choix générique de S_0 dans K_4^R, S_0 ne contient qu'une seule droite l et qu'un seul pinceau elliptique $|C|_{S_0}$ de degré 4 tel que le membre général ne rencontre pas l.

Fixons une quartique K3 $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant $K = C \sqcup l$, générique dans K_4^R de sorte qu'elle satisfait aux propriétés du (iii). Soit $S \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r$ le transformé strict de S_0, de sorte que p induit l'isomorphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_0$. Alors :

(iv) l'espace de modules $F_S^R = B$ est un ouvert de $\mathbb{P}^1 = |C|_{S_0}$,

(v) la jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$, de la famille universelle $f : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique, s'identifie à la restriction au-dessus de B de la fibration lagrangienne $h : M_{S_0}^H(0, [C], 0) \to \mathbb{P}^1$.

Démonstration. Le morphisme d'éclatement se décompose en $\epsilon : X = \tilde{\mathbb{P}}^3_K \xrightarrow{\epsilon_2} \tilde{\mathbb{P}}^3_C \xrightarrow{\epsilon_1} \mathbb{P}^3$, et on note $E_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_C$, $E_2 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_K$ les diviseurs exceptionnels.

(i) : On a $K_X = -4H + E_2 + E_1$. Considérons un diviseur $S \in |-K_X| = |4H - E_1 - E_0|$ irréductible et $S_0 = \epsilon(S) \subset \mathbb{P}^3$. Alors, d'après la proposition 5.1.6 (ii), $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ est une quartique, $C \subset S_0$ et $l \subset S_0$.

(ii) : Soit $S_0 = V(f_4)$ une quartique $K3$ contenant une intersection complète lisse de deux quadriques $C = Q \cap Q' = V(q, q') \subset \mathbb{P}^3$ et une droite $l = H \cap H' = V(h, h')$, telles que $l \cap C = \emptyset$. On a $C \subset S_0$ si et seulement si $f_4 = qq_1 + q'q_2$, avec q_1,q_2 des formes quadratiques de $\mathbb{C}^4$, de même, $l \subset S_0$ si et seulement si $f_4 = f_3 h + f_3' h'$ avec f_3, f_3' des polynômes homogènes de degré 3 de $\mathbb{C}^4$. Par conséquent, $Q \cap S_0 = C \cup C'$, où $C' = V(q, q_2) \subset \mathbb{P}^3$ et $H \cap S_0 = C'' \cup l$, où $C'' = V(h, f_3') \subset \mathbb{P}^3$ est une courbe elliptique plane. D'où $[C] + [C'] = 2H \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$ et $[C''] + [l] = H \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Les intersections dans S_0 sont $H^2 = 4$, $H \cdot C = H \cdot C' = 4$, $H \cdot C'' = 3$, $C^2 = C'^2 = C''^2 = 0$, $l^2 = -2$, $C \cdot C' = 8$, $C \cdot l = 0$, $C \cdot C'' = 4$, $C' \cdot C'' = 2$, $C' \cdot l = (2H - C) \cdot l = 2H \cdot l = 2$, $C'' \cdot l = (H - l) \cdot l = 3$. La quartique $K3$ S_0 contient donc trois pinceaux elliptiques :

— Un constitué de courbes elliptiques C_t de degré 4, dans lequel varie C, et tel que pour $t \in |C|_{S_0}$, $C_t \cap l = \emptyset$ ou $l \subset C_t$, et que ses membres sont génériquement des intersections de deux quadriques (c'est le cas qui nous intéresse).

— Un autre, constitué de courbes elliptiques C'_t de degré 4, dans lequel varie C', et tel que pour $t \in |C'|_{S_0}$ générique, $C'_t \cap l = \{2 \text{ points }\}$. Les membres du pinceau sont des intersections de deux quadriques.

— Un troisième, constitué de courbes elliptiques C''_t de degré 3, dans lequel varie C'', et tel que pour $t \in |C''|_{S_0}$ générique, $C''_t \cap l = \{3 \text{ points }\}$, et que ses membres ne sont pas des intersections de deux quadriques.

Le réseau de Picard de S_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C] \oplus \mathbb{Z}[l]$ de rang 3, dont la forme d'intersection est celle indiquée dans l'énoncé du théorème. Les propriétés :

— la classe $[H]$ est ample;

— les classe $[C]$ et $[l]$ sont représentées respectivement par une courbe connexe lisse et par une droite,

sont ouvertes pour la topologie de Zariski dans toute déformation de S préservant l'algébricité des classes $[H]$, $[C]$, $[l]$. Cela entraîne qu'une surface $K3$ générique dans l'espace de module K_4^R s'obtient par cette construction. Le théorème de Beauville ([6]) dit que le morphisme $s^R : \mathcal{F}^R \to K_4^R$ est génériquement surjectif, donc les surface $K3$ très générales de K_4^R, celle de nombre de Picard 3, ont bien une intersection non vide avec l'image de ce morphisme.

(iii) Pour un choix générique de $S_0 \in K_4^R$, $\mathrm{Pic}\,(S) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C] \oplus \mathbb{Z}[l]$ est de rang trois d'après (ii). Dans ce cas, S_0 ne contient qu'une droite l et qu'un seul pinceau elliptique $|C|_{S_0}$ de degré 4 tel que $C \cap l = \emptyset$, car les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{ll} (aH + bC + cl)^2 & = -2 \\ (aH + bC + cl) \cdot H & = 1 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{ll} (aH + bC + cl)^2 & = 0 \\ (aH + bC + cl) \cdot H & = 4 \\ (aH + bC + cl) \cdot l & = 0 \end{array} \right.$$

n'ont chacun qu'une seule solution dans $\mathbb{Z}^3$, qui est $(0, 0, 1)$, resp. $(0, 1, 0)$.

(iv) : Soit X une extension de Fano de S. Ainsi $X = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C' \sqcup l}$ contient S en tant que diviseur anticanonique. D'après la proposition 5.1.6 (ii), $S_0 = \epsilon(S)$ contient C' et l. La famille

$$f : \mathcal{X} = (\widetilde{\mathbb{P}^{g_C} \times \mathbb{P}^3})_{\mathcal{C}_{S_0}} \to \mathbb{P}^{g_C},$$

où $\mathcal{C}_{S_0} = \mathcal{C} \cap (\mathbb{P}^{g_C} \times S_0)$ est la correspondance d'incidence, contient donc toutes les extensions de Fano de S. La fibre de f au-dessus de $t \in \mathbb{P}^{g_C}$ est l'éclaté $X_t = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C_t \sqcup l}$ de $\mathbb{P}^3$ en $K_t = C_t \sqcup l$ qui contient S en tant que diviseur

anticanonique (cf. proposition 5.1.6 (iii)). Soit $B \subset \mathbb{P}^{g_C}$ l'ouvert des $t \in \mathbb{P}^{g_C}$ tels que C_t est lisse. On a ainsi un morphisme surjectif de champs algébriques $r : B \to \mathcal{F}_S^R$. Le fait que ce morphisme est étale se démontre comme dans le point (iv) de la proposition 5.3.2 : $\dim \mathcal{F}_S^R = h^{1,2}(X) = g(C) = \dim |C|_{S_0}$ et $|C|_{S_0}$ est transverse à l'action de $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{P}^3)$, ce qui montre que la différentielle est injective. L'injectivité de r suit du lemme 5.3.3 de la même façon que dans la démonstration du (iv) de la proposition 5.3.2. Ainsi r est un isomorphisme, c'est à dire que $B = F_S^R$ est l'espace de modules du champ $\mathcal{F}_S^R$ et $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ est la famille universelle.
(v) : Pour tout $t \in B$, $J(C_t) = J(X_t)$. Donc la restriction au-dessus de B $h^{-1}(B) = M^H_{S_0}(0, [C], 0)_B \to B$ de la fibration lagrangienne $h : M^H_{S_0}(0, [C], 0) \to \mathbb{P}^1$ s'identifie à la fibration lagrangienne $J(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la jacobienne intermédiaire relative de la famille universelle $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano contenant S en tant que diviseur anticanonique. □

5.3.3 Les éclatés de $\mathbb{P}^3$ en une union disjointe d'une courbe lisse connexe et d'un point

Il n'y a qu'une seule famille dans ce cas ; c'est la **Famille 14 de nombre de Picard 3.**

Dans ce paragraphe, on considère les éclatés $X = \tilde{\mathbb{P}}^3_K$ de $\mathbb{P}^3$ en l'union disjointe $K = C \sqcup \{x\}$, où C est une cubique plane lisse et x un point de $\mathbb{P}^3$. Le morphisme d'éclatement se décompose en $\epsilon : X = \tilde{\mathbb{P}}^3_K \xrightarrow{\epsilon_2} \tilde{\mathbb{P}}^3_x \xrightarrow{\epsilon_1} \mathbb{P}^3$ et on note $E_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$, $E_2 \subset X = \tilde{\mathbb{P}}^3_K$ les diviseurs exceptionnels. On note $\mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C)$ le schéma de Hilbert de $\mathbb{P}^3$ dans lequel varie la courbe C et $\mathcal{C} \subset \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C) \times \mathbb{P}^3$ la correspondance d'incidence. Soit r un entier positif et $p : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^3$ la projection de sorte que, pour toute courbe $C' \in \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^3}(O_{\mathbb{P}^3}, P_C)$, le morphisme d'éclatement se factorise par $\epsilon : \tilde{\mathbb{P}}^3_{C',x} \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r \xrightarrow{p} \mathbb{P}^3$ (cf. lemme 5.1.7).

Lemme 5.3.5. *Un isomorphisme $\phi : X = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C \sqcup x} \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C' \sqcup x}$, où $C \subset \mathbb{P}^3$ et $C' \subset \mathbb{P}^3$ sont des cubiques planes lisses, descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de $\mathbb{P}^3$ tel que $\overline{\phi}(C) = C'$, c'est à dire que les contractions $\epsilon : X \to \mathbb{P}^3$ et $\epsilon' \circ \phi : X \to \mathbb{P}^3$ sont équivalentes, $\epsilon : X \to \mathbb{P}^3$ et $\epsilon' : X' \to \mathbb{P}^3$ désignant les morphismes d'éclatement.*

Démonstration. La preuve est entièrement similaire à celle du lemme 5.3.3, à la seule différence que dans le cas considéré dans le lemme 5.3.3 la courbe elliptique C n'avait point de trisécantes, tandis qu'ici C est une cubique plane, qui possède une famille de trisécantes de dimension 2. Les trisécantes de C ne peuvent donc pas engendrer le diviseur exceptionnel d'une contraction non équivalente de X, puisque la famille complète des déformations d'une fibre d'un diviseur exceptionnel au dessus d'une courbe C' est de dimension 1. □

Proposition 5.3.6. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface $K3$ diviseur anticanonique de $X = \tilde{\mathbb{P}}^3_K$, alors $S_0 = \epsilon(S) = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ est une quartique qui contient C et x avec une singularité quadratique en x.*

(ii) Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique ayant pour seule singularité un point double ordinaire en x et contenant une cubique plane C qui ne passe pas par x. Alors le transformé strict $S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ de S_0 est une surface $K3$ dont le réseau de Picard contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E_1'] \oplus \mathbb{Z}[C]$, où $E_1' = E_1 \cap S_1$ est le diviseur exceptionnel de S_1, muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La surface $K3$ S_1 est primitivement polarisée par la classe ample primitive $2H - E_1'$ de degré 14. Elle contient un pinceau elliptique $|C|_{S_1}$ de degré 6 et une courbe rationnelle lisse l. Une surface $K3$ S_1 générique dans K^R_{14} s'obtient par cette procédure. Cela entraîne, entre autre, que la surface $K3$ générique obtenue par cette procédure a pour réseau de Picard R.

(iii) Pour un choix générique de $S_1 \in K^R_{14}$, S_1 n'a qu'un seul pinceau elliptique $|C|_{S_1}$ de degré 6 dont les membres ne rencontrent pas E_1'.

Fixons une quartique $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant C, ayant comme seule singularité un point double ordinaire x qui n'appartient pas à C. Soit $S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ le transformé strict de S_0 et $S \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r$ le transformé strict de S_1, de sorte que p induit le morphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_1 \to S$. Alors, pour un choix générique de $S_1 \in K^R_{14}$ obtenu par cette procédure, de sorte qu'elle vérifie aux propriétés de (iii) :

(iv) l'espace de modules $F_S^R = B$ est un ouvert de $|C|_{S_1} = \mathbb{P}^1$, et

(v) la jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$, de la famille universelle $f : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique, s'identifie à la restriction au-dessus de B de la fibration lagrangienne $h : M^H_{S_1}(0,[C],0) \to \mathbb{P}^1$.

Démonstration.
(i) : On a $K_X = -4H + 2E_1 + E_2 \in \mathrm{Pic}\,(X)$. Soit $S \in |-K_X|$ irréductible, $S_1 = \epsilon_1(S) \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ et $S_0 = \epsilon(S) = \epsilon_1(S_1) \subset \mathbb{P}^3$. D'après la proposition 5.1.6, $[S_1] = 4H - 2E_1 \in \mathrm{Pic}\,(\tilde{\mathbb{P}^3}_x)$, $C \subset S_1$ et $S \subset X$ est le transformé strict de S_1. On a aussi $C = \epsilon_1(C) \subset S_0$. De même, $[S_0] = 4H \in \mathrm{Pic}\,(\mathbb{P}^3)$, $x \in S_0$ et S_1 est le transformé strict de S_0. Notons $E'_1 \subset S_1$ le diviseur exceptionnel avec $E'_1 = E_1 \cap S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$. La formule de projection donne alors $({E'_1}^2)_{S_1} = (E_1.E_1.S_1)_{\tilde{\mathbb{P}}^1_x} = -2$. Donc S_0 a une singularité quadratique en x et $\epsilon_1 : S_1 \to S_0$ est l'éclatement de cette singularité.
(ii) : Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique ayant pour seule singularité un point double ordinaire en x et contenant une cubique plane lisse $C = V(f_3,h) \subset \mathbb{P}^3$ ne passant pas par x. Le transformé strict $S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}^3}_x$ est une surface $K3$ qui est éclatement de la singularité en x. On a $C \subset S_0$ si et seulement si $f_4 = h'f_3 + hf'_3$ avec h' une forme linéaire de $\mathbb{C}^4$ et f'_3 un polynôme de degré 3 de $\mathbb{C}^4$. Alors $H \cap S_0 = C \cup l$, où $l = V(h,h') \subset \mathbb{P}^3$ est une droite. Pour $t \in \mathbb{P}^1$ paramétrant les hyperplans H_t tel que $l \subset H_t$, $H_t \cap S_0 = C_t \cup l$. Pour $t \in \mathbb{P}^1$ générique, C_t ne contient pas x et donc $C_t = \epsilon_0^{-1}(C_t) \subset S_1$ et $l = \epsilon^{-1}(l) \subset S_1$. La surface $K3$ S_1 contient donc une droite l et un pinceau elliptique $|C|_{S_1}$ constitué des courbes C_t. Notons que $C_t \subset S_0$ et $l \subset S_0$ sont des diviseurs de Cartier de S_0, car C_t ne contient pas x pour t générique et l ne contient pas x. Ainsi $[C_t] = H - [l] \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$ et $[C_t] = \epsilon_1^*[C_t] = H - [l] \in \mathrm{Pic}\,(S_1)$. Les intersections dans S_1 sont $H \cdot C = 3$, $\;H \cdot l = 1$, $\;H \cdot E'_1 = C \cdot E'_1 = l \cdot E'_1 = 0$, et $C \cdot l = 3$. Le réseau de Picard de S_1 contient donc le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E'_1] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de rang 3, muni de la matrice indiquée dans le théorème. La surface $K3$ S_1 est polarisée par la classe ample primitive $2H - [E'_1] \in \mathrm{Pic}\,(S_1)$ de degré 14. Les propriétés :

— la classe $[H]$ est ample en dehors de E'_1,
— la classe $[C]$ est représentée par une courbe lisse connexe,
— la classe $[E'_1]$ est représentée par une courbe rationnelle lisse,

sont ouvertes pour la topologie de Zariski dans toute déformation de S_1 préservant l'algébricité des classes $[H]$, $[C]$ et $[E'_1]$. Cela entraîne qu'une surface $K3$ générique dans l'espace de module K^R_4 des surfaces $K3$ s'obtient par cette construction. Le théorème de Beauville ([6]) dit que le morphisme $s^R : \mathcal{F}^R \to K^R_4$ est génériquement surjectif, donc les surface $K3$ très générales de K^R_4, celles de nombre de Picard 3, ont bien une intersection non vide avec l'image de ce morphisme.
(iii) : Pour un choix générique de S_1 dans K^R_{14}, $\mathrm{Pic}\,(S_1) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E'_1] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est de rang trois d'après (ii). Dans ce cas, S_1 ne contient qu'un seul pinceau elliptique de degré 6 dont les membres ne rencontrent pas E'_1 ou contiennent E'_1, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC + cE'_1)^2 & = 0 \\ (aH + bC + cE'_1) \cdot (4H - 2[E'_1]) & = 6 \\ (aH + bC + cE'_1) \cdot E'_1 & = 0, \end{cases}$$

a une unique solution dans $\mathbb{Z}^3$, qui est $(0,1,0)$.

Fixons maintenant une quartique $K3$ $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant une courbe elliptique plane $C = V(f_3,h)$ et ayant comme seule singularité un point double ordinaire en x non contenue dans C. Alors le transformé strict $S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ est une surface $K3$ dans K^R_{14}. On choisit S_0 générique de sorte que S_1 est générique dans K^R_{14} et vérifie la propriété du (iii). Soit $S \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^r$ le transformé strict de S_1, de sorte que p induit le morphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_1 \to S_0$.
(iv) : Soit X une extension de Fano de S. Ainsi $X = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C' \sqcup x}$ contient S en tant que diviseur anticanonique. D'après la proposition 5.1.6 (ii), $S_1 = \epsilon_2(S)$ contient C'. Donc $S_0 = \epsilon_1(S_1) = \epsilon(S)$ contient C' et x. La famille

$$f : \mathcal{X} \subset (\widetilde{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3})_{\mathcal{C}_{S_0} \cup (\mathbb{P}^1 \times \{x\})} \to \mathbb{P}^1 = |C|_{S_0} = |C|_{S_1},$$

où $\mathcal{C}_{S_0} = \mathcal{C} \cap (\mathbb{P}^1 \times S_0)$ est la correspondance d'incidence, contient donc toute les extensions de Fano de S. La fibre de f au-dessus de $t \in \mathbb{P}^1$ est l'éclaté $X_t = \tilde{\mathbb{P}^3}_{C_t \sqcup x}$ de $\mathbb{P}^3$ en $K_t = C_t \sqcup x$ qui contient S en tant que diviseur anticanonique (cf. proposition 5.1.6 (iii)). Soit $B \subset \mathbb{P}^1$ l'ouvert des $t \subset \mathbb{P}^1$ tel que C_t est lisse et $\langle C_t \rangle = H_t \subset \mathbb{P}^3$ ne contient pas x. On a ainsi un morphisme surjectif de champs algébriques $r : B \to \mathcal{F}^R_S$. Le fait que ce morphisme est étale se démontre comme dans la preuve du (iv) de la proposition 5.3.2 : $\dim \mathcal{F}^R_S = h^{1,2}(X) = g(C) = \dim |C|_{S_1} = \dim |C|_{S_0}$ et

$|C|_{S_0}$ est transverse à l'action de Aut $(\mathbb{P}^3)$, ce qui montre que la différentielle est injective. Soit $\phi : X_t \xrightarrow{\sim} X_{t'}$ un isomorphisme fixant S point par point. D'après le lemme 5.3.5, il descend à un automorphisme de $\mathbb{P}^3$ fixant S_0 point par point. Donc $C_t = C_{t'}$ et $X_t = X_{t'}$. Ceci montre que r est injectif. Ainsi r est un isomorphisme, c'est à dire que $B = F_S^R$ est l'espace de modules du champ $\mathcal{F}_S^R$ et $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ est la famille universelle.
(v) : Pour $t \in B$, $J(C_t) = J(X_t)$ car $J(V') = 0$. Donc la jacobienne intermédiaire relative $f : \mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la famille universelle $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano contenant S en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction $h^{-1}(B) = M_{S_1}^{2H-E_1'}(0, [C], 0)_B \to B$ de la fibration lagrangienne $h : M_{S_1}^{2H-E_1'}(0, [C], 0) \to \mathbb{P}^1$ donnée par l'application du support des faisceaux. □

5.3.4 Les éclatés de $\tilde{\mathbb{P}}^3_x$ en le transformé strict d'une courbe

Il n'y a q'une seule famille dans ce cas, c'est la **Famille 11 de nombre de Picard 3**.

Les variétés de Fano sont les éclatés $X = \tilde{\mathbb{P}}^3_{x,C}$ de $\tilde{\mathbb{P}}^3_x$ en une courbe elliptique $C = D_1 \cap D_2$ intersection de deux diviseurs $D_i \in | -1/2K_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}|$. Notons $\epsilon : X = \tilde{\mathbb{P}}^3_{x,C} \xrightarrow{\epsilon_2} \tilde{\mathbb{P}}^3_x \xrightarrow{\epsilon_1} \mathbb{P}^3$ le morphisme d'éclatement et $E_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$, $E_2 \subset X$ les diviseurs exceptionnels. On note $\mathcal{C} \subset \mathrm{Quot}_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}, P_C) \times \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ la correspondance d'incidence. Soit r un entier positif tel que, pour toute courbe $C' \in \mathrm{Quot}_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}, P_C)$, le morphisme d'éclatement se factorise par $\epsilon : \tilde{\mathbb{P}}^3_{x,C'} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{P}}^3_x \times \mathbb{P}^r \xrightarrow{p} \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ (cf. lemme 5.1.7).

Lemme 5.3.7. *Un isomorphisme $\phi : X = \tilde{\mathbb{P}^3}_{x,C} \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{\mathbb{P}^3}_{x,C'}$, où $C \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ et $C' \subset \tilde{\mathbb{P}^3}_x$ sont des courbes elliptiques comme ci-dessus, descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de $\tilde{\mathbb{P}}^3_x$ tel que $\overline{\phi}(C) = C'$.*

Démonstration. D'après la Table 3 de [46], il existe une unique façon de contracter X sur $\tilde{\mathbb{P}^3}_x$. □

Proposition 5.3.8. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface K3 diviseur anticanonique de X, alors $S_0 = \epsilon(S) = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ est une quartique contenant une courbe elliptique $\overline{C} = \epsilon_1(C) = V(q_1, q_2) \subset \mathbb{P}^3$, qui est une intersection complète lisse de deux quadriques passant par x, et S_0 possède une singularité quadratique en x.*

(ii) Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique ayant pour seule singularité un point double ordinaire x et contenant une courbe elliptique, qui est une intersection complète lisse de deux quadriques $C = V(q_1, q_2) \subset \mathbb{P}^3$ passant par x. Alors, le transformé strict $S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ de S_0 est une surface K3 dont le réseau de Picard contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E_1'] \oplus \mathbb{Z}[C]$, où $E_1' = E_1 \cap S_1$ est le diviseur exceptionnel de S_1, muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La surface K3 S_1 est primitivement polarisée par la classe ample $2H - E_1'$ de degré 14. De plus, S_1 contient deux pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$, $|C'|_{S_0}$ de degré 7. Une surface K3 S_1 générique de K_{14}^R s'obtient par cette construction. Cela entraîne entre autre qu'une surface K3 générique obtenue par cette construction a pour réseau de Picard R.

(iii) Pour un choix générique de $S_1 \in K_{14}^R$, $|C|_{S_0}$, $|C'|_{S_0}$ sont les seuls pinceaux elliptiques de degré 7 dont les membres intersectent E_1' transversalement.

Fixons une quartique $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ ayant comme seule singularité un point double ordinaire x et contenant une courbe elliptique $C = V(q_1, q_2) \subset \mathbb{P}^3$ qui est une intersection complète lisse de deux quadriques lisses passant par x. Soient $S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ le transformé strict de S_0 et $S \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x \times \mathbb{P}^r$ celui de S_1 de sorte que p induit l' isomorphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_1$. Alors, pour un choix générique de $S_1 \in K_{14}^R$ obtenue par cette procédure de sorte qu'elle vérifie à la propriété du (iii) :

(iv) l'espace de modules $F_S^R = B$ est un ouvert de $|C|_{S_1} \sqcup |C'|_{S_1} = \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$, et

(v) la fibration lagrangienne $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la jacobienne intermédiaire relative de la famille universelle $f : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction $h^{-1}(B) \to B$ de la fibration lagrangienne $h : M_{S_1}^{2H-E_1'}(0, [C], 0) \sqcup M_{S_1}^{2H-E_1'}(0, 2H - [C] - [E_1'], 0) \to |C|_{S_1} \sqcup |C'|_{S_1}$.

Démonstration.
(i) : On a $K_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x} = -4H + 2[E_1] \in \mathrm{Pic}\,(\tilde{\mathbb{P}}^3_x)$ et $K_X = -4H + 2[E_1] + [E_2] \in \mathrm{Pic}\,(X)$. Soit $S \in |-K_X|$ irréductible, $S_1 = \epsilon_2(S) \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ et $S_0 = \epsilon(S) = \epsilon_1(S_1) \subset \mathbb{P}^3$. Alors $[S_1] = \epsilon_*[S] = 4H - 2[E_1] \in \mathrm{Pic}\,(\tilde{\mathbb{P}}^3_x)$, $C \subset S_1$ et $S \subset X$ est

le transformé strict de S_1. De même, $[S_0] = 4H \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^3)$, donc $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ est une quartique et contient x. Notons $E_1' \subset S_1$ le diviseur exceptionnel de S_1, qui est de Cartier, avec $E_1' = E_1 \cap S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$. La formule de projection donne $({E_1'}^2)_{S_1} = (E_1 \cdot E_1 \cdot S_1)_{\tilde{\mathbb{P}^1}_x} = -2$, donc S_0 a une singularité quadratique en x et $\epsilon_1 : S_1 \to S_0$ est l'éclatement de cette singularité. On a $C = D_1 \cap D_2 \subset \tilde{\mathbb{P}^3}_x$ avec $D_i \sim 2H - E_1$ dans $\tilde{\mathbb{P}}^3$, pour $i \in \{1,2\}$. Soit $\overline{D_i} = \epsilon_0(D_i) \subset \mathbb{P}^3$, pour $i \in \{1,2\}$, alors $\overline{D_i} = V(q_i) \subset \mathbb{P}^3$ sont des quadriques lisses contenant x et les D_i sont les transformés strict de $\overline{D_i}$. On a $\epsilon_1(C) \subset \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$, donc $\epsilon_1(C) = \overline{C} = \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ (irréductibilité de $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ pour D_i générique). Puisque $S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ contient C, la quartique $S_0 = \epsilon(S_1) \subset \mathbb{P}^3$ contient $\overline{C} = \epsilon_1(C)$.
(ii) : Soit $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ une quartique ayant comme seule singularité un point double ordinaire en x et contenant $\overline{C} = V(q_1,q_2) = \overline{D_1} \cap \overline{D_2} \subset \mathbb{P}^3$ une courbe elliptique intersection complète lisse de deux quadriques lisses $\overline{D_1} = V(q_1)$ et $\overline{D_2} = V(q_2)$ passant par x. On a $\overline{C} \subset S_0$ si et seulement si $f_4 = q_1'q_1 + q_2'q_2$, où q_1' et q_2' sont des formes quadratiques de $\mathbb{C}^4$. Alors $\overline{D_1} \cap S_0 = \overline{C} \cup \overline{C}' \subset S_0$ avec $\overline{C}' = V(q_1, q_2') \subset \mathbb{P}^3$. Ainsi $2H = [\overline{C}] + [\overline{C'}] \in CH_1(S_0)$. Considérons maintenant le morphisme $S_1 \to S_0$ et les transformés stricts $C \subset S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}^3}_x$, $C' \subset S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}^3}_x$ de $\overline{C}$, $\overline{C'}$ respectivement. On a alors $2H = \epsilon^*2H = [C] + [C'] + [E_1'] \in \mathrm{Pic}(S_1)$. A priori seule $H = [\Lambda_2 \cap S_0] \in \mathrm{Pic}(S_0)$ est la classe d'un diviseur de Cartier de S_0. On montre la deuxième égalité comme suit. On voit, en se restreignant à l'ouvert $S_1 \backslash E_1' \subset S_1$, que $2H = [C] + [C'] + n[E_1'] \in \mathrm{Pic}(S_1)$, car $2H = [C] + [C'] \in \mathrm{Pic}(S_1 \backslash E_1') = \mathrm{Pic}(S_0 \backslash \{x\})$. Ensuite, les intersections dans S_1 sont $2H \cdot E_1' = 0 = C \cdot E_1' + C' \cdot E_1' + {E_1'}^2 = 2 - 2n$. En effet, $E_1' \cdot C = E_1' \cdot C' = 1$ car $\overline{C} \subset S_0$ et $\overline{C'} \subset S_0$ sont lisses, $\overline{C'}$ étant une intersection générique de deux quadriques lisses de $\mathbb{P}^3$. Donc $n = 1$. Les intersections dans S_1 sont $C^2 = 0$, $C'^2 = 0$ et $2H = C + C' + E_1'$, donc $C \cdot C' = 2H \cdot C' - E_1' \cdot C' = 2H \cdot \overline{C} - 1 = 8 - 1 = 7$. La surface $K3$ S_1 contient donc deux pinceaux elliptiques C_t et C_t' avec $C_t \cdot C_t' = 7$. Le réseau de Picard de S_1 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E_1'] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de rang 3 avec la forme d'intersection indiquée dans l'énoncé du théorème. S_1 est polarisée par la classe ample primitive $2H - E_1'$. Les propriétés :

- la classe $[H]$ est ample en dehors de E_1',
- la classe $[C]$ est représentée par une courbe connexe lisse,
- la classe $[E_1']$ est représentée par une courbe rationnelle lisse,

sont ouvertes pour la topologie de Zariski dans toute déformation de S_1 préservant l'algébricité des classes $[H]$, $[C]$ et $[E_1']$. Cela entraîne qu'une surface $K3$ générique dans l'espace de module K_4^R des surfaces $K3$ s'obtient par cette construction. Le théorème de Beauville ([6]) dit que le morphisme $s^R : \mathcal{F}^R \to K_4^R$ est génériquement surjectif, donc les surface $K3$ très générales de K_4^R, celles de nombre de Picard 3, ont bien une intersection non vide avec l'image de ce morphisme.
(iii) Pour un choix générique de S_1 dans K_{14}^R, $\mathrm{Pic}(S_1) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E_1'] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est de rang trois d'après (ii). Dans ce cas S_1 possède exactement deux pinceaux elliptiques de degré 7 dont les membres intersectent E_1' transversalement. Ce sont les pinceaux elliptiques $|C|_{S_1}$, dans lequel varie la courbe C, et $|C'|_{S_1}$, dans lequel varie la courbe C', car le système

$$\begin{cases} (aH + bC + cE_1')^2 &= 0 \\ (aH + bC + cE_1') \cdot H &= 4 \\ (aH + bC + cE_1') \cdot E_1' &= 1, \end{cases}$$

a exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}^3$, qui sont $(0,1,0)$ et $(2,-1,-1)$.

Fixons maintenant une quartique $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ ayant comme seule singularité un point double ordinaire $x \in \overline{C}$ et contenant une courbe elliptique $\overline{C} = V(q_1,q_2) \subset \mathbb{P}^3$ intersection complète lisse de deux quadriques lisses passant par x. Le transformé strict $S_1 \to S_0$ est une surface $K3$ et contient les transformés stricts $C \subset S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}^3}_x$ et $C' \subset S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}^3}_x$ de $\overline{C}$ et $\overline{C'}$ respectivement. On choisit S_1 générique dans K_{14}^R, de sorte que $\mathrm{Pic}(S_1) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E_1'] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est de rang 3. Ainsi, $|C|_{S_1}$ et $|C'|_{S_1}$ sont les seuls pinceaux elliptiques de degré 7. Soit $S \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x \times \mathbb{P}^r$ le transformé strict de S_1, de sorte que p induit l'isomorphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_1$.
(iv) : Soit X une extension de Fano de S. Ainsi $X = \tilde{\mathbb{P}^3}_{x,C''}$ contient S en tant que diviseur anticanonique. D'après le point (i), $S_1 = \epsilon_2(S)$ contient C' et la courbe $\overline{C} = \epsilon_1(S_1)$ de $S_0 = \epsilon_1(S)$ passe par x. La famille

$$f : \mathcal{X} \subset ((\widetilde{|C|_{S_1} \sqcup |C'|_{S_1}}) \times \tilde{\mathbb{P}}^3{}_x)_{\mathcal{C}_{S_1}} \to |C|_{S_1} \sqcup |C'|_{S_1} = \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1,$$

où $\mathcal{C}_{S_1} = \mathcal{C} \cap ((|C|_{S_1} \sqcup |C'|_{S_1}) \times S_1)$ est la correspondance d'incidence, contient donc toutes les extensions de Fano de S. La fibre de f au-dessus de $t \in \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$ est l'éclaté $X_t = \tilde{\mathbb{P}^3}_{x,C_t}$ de $\tilde{\mathbb{P}}^3_x$ en C_t (ou C_t') qui contient S en tant que diviseur anticanonique (cf. proposition 5.1.6 (iii)). Soit $B_c \subset \mathbb{P}^1$ l'ouvert des $t \in \mathbb{P}^1$ tels que C_t est lisse, $B_{c'} \subset \mathbb{P}^1$

l'ouvert des $t \in \mathbb{P}^1$ tels que C'_t est lisse et $B = B_c \sqcup B_{c'} \subset |C|_{S_1} \sqcup |C'|_{S_1}$ l'ouvert correspondant. On a ainsi un morphisme surjectif de champs algébriques $r : B \to \mathcal{F}_S^R$. Le fait que ce morphisme est étale se démontre comme dans la preuve du (iv) de la proposition 5.3.2 : $\dim \mathcal{F}_S^R = h^{1,2}(X) = g(C) = \dim |C|_{S_1}$ et $|C|_{S_1}$ est transverse à l'action de Aut $(\tilde{\mathbb{P}}^3_x)$, ce qui montre que la différentielle est injective.

Pour l'injectivité de r, on remarque d'abord que, par le lemme 5.3.7, il existe une unique façon de contracter X sur $\tilde{\mathbb{P}}^3_x$, donc il suffit de vérifier q'il n'existe pas d'automorphisme η de S_1 qui induit l'identité sur R et transforme une courbe $C_1 \in |C|_{S_1}$ en une courbe distincte $C_2 \in |C|_{S_1} \sqcup |C'|_{S_1}$. Le fait que η fixe R implique qu'il est induit par une transformation linéaire de $\mathbb{P}^3$, puisqu'il fixe H. On peut supposer S_1 générique, et d'après [59], [80], un automorphisme non trivial de S_1 induisant l'identité sur Pic (S_1), s'il y en a un, est une involution. Donc si un tel $\eta \neq \mathrm{id}$ existe, il s'écrit, en coordonnées convenables, sous une des trois formes : $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (-x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (-x_0 : -x_1 : x_2 : x_3)$ ou $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (-x_0 : -x_1 : -x_2 : x_3)$, le point singulier de S_0 dans tous le trois cas étant $P = (1 : 0 : 0 : 0)$. Il est connu que la courbe elliptique projective générique de degré donné possède un seul automorphisme linéaire non trivial, qui est l'involution -1 de la loi de groupe avec l'élément neutre choisi dans un des points fixes. Don pour tout η d'entre ces trois formes normales, on peut choisir une quartique elliptique C passant par P, telle que son idéal soit η-invariant et, en plus, que η soit l'unique automorphisme d'ordre 2 de E ; on peut choisir l'idéal de C sous la forme (q_1, q_2), où chacune des deux quadriques q_i est invariante ou anti-invariante sous η. On peut ensuite construire des quartiques K3 S_0 à un point double en P et contenant C en les donnant par l'équation $q_1Q_1 + q_2Q_2 = 0$, où Q_i sont des formes quadratiques s'annulant en P. Dans chacun des cas, suivant les choix de η et de valeurs propres de η pour q_1, q_2, on trouve sans peine un exemple d'une déformation de Q_1, Q_2, qui n'admet pas d'extension à une déformation de η en tant qu'une involution linéaire préservant S_0. Cela démontre que la surface S_0 générique de K^R n'a pas d'automorphismes différents de l'identité qui fixent Pic $(S) \simeq R$. Il s'ensuit que r est injectif.

Ainsi r est un isomorphisme, c'est à dire $B = F_S^R$ est l'espace de modules du champ $\mathcal{F}_S^R$ et $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ est la famille universelle.

(v) : Pour tout $t \in B$, on a l'isomorphisme canonique $J(C_t) = J(X_t)$. Donc la fibration lagrangienne $J(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la jacobienne intermédiaire relative de la famille universelle $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano contenant S en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction $h^{-1}(B) \to B$ de la fibration lagrangienne

$$h : M_{S_0}^{2H-E'_1}(0, [C], 0) \sqcup M_{S_0}^{2H-E'_1}(0, 2H - [E'_1] - [C], 0) \to |C|_{S_1} \sqcup |C'|_{S_1}$$

donnée par l'application support. □

5.3.5 Les éclatés d'une quadrique de $\mathbb{P}^4$ en une courbe lisse connexe

Dans ce paragraphe, on considère les éclatés X d'une quadrique $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une courbe C. On note $\epsilon : \tilde{Q}_C \to Q$ le morphisme d'éclatement.

Lemme 5.3.9. *Soient $C \subset Q$ et $C' \subset Q$ des courbes connexes lisses telles que $X = \tilde{Q}_C$, $X' = \tilde{Q}_{C'}$ soient des variétés de Fano de nombre de Picard 2, c'est à dire, C, C' appartiennent aux cas no. 7, 13, 17 ou 23 de la table 2 de [46].*

(i) Si C, C' n'appartiennent pas au cas no. 17 de Mori-Mukai, alors tout isomorphisme $\phi : X = \tilde{Q}_C \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{Q}_{C'}$, descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de Q tel que $\overline{\phi}(C) = C'$, c'est à dire que les contractions $\epsilon : X \to Q$ et $\epsilon' \circ \phi : X \to Q$ sont équivalentes, $\epsilon : X \to Q$ et $\epsilon' : X' \to Q$ désignant les morphismes d'éclatement.

(ii) De plus, ceci est encore vrai si C est une courbe du cas no. 17 et si X contient un diviseur anticanonique lisse S telle que ϵ et $\epsilon' \circ \phi$ induisent un isomorphisme de S sur son image.

Démonstration.

Ce lemme se démontre par les mêmes arguments que ceux utilisés dans les lemmes 5.3.1 à 5.3.5.

(i) Soit $\epsilon_i : X \to Q$ deux contractions qui contractent deux diviseurs distincts E_1, E_2 sur des courbes C_1, C_2, On trouve alors deux classes semi-amples $H_i = \epsilon_i^* c_1(O_Q(1))$ telles que Pic $(X) = \mathbb{Z}[H_1] \oplus \mathbb{Z}[E_1] = \mathbb{Z}[H_2] \oplus \mathbb{Z}[E_2]$. Il existe donc une transformation $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1 qui transforme H_1, E_1 en H_2, E_2. En utilisant des contraintes diophantiennes, imposées sur M par la condition $\det M = \pm 1$ et les indices d'intersection des

diviseurs K_X, H_i, E_i, on démontre, comme dans le cas d'éclatés de $\mathbb{P}^3$, que $g = g(C_i)$ et $d = d(C_i)$ ne dépendent pas de $i = 1, 2$ et que les fibres de la surface réglée $E_2 \to C_2$ sont les transformées strictes dans X, pour ϵ_1, des droites bisécantes de C_1 contenues dans Q. Dans le cas de $\mathbb{P}^3$ les fibres de $E_2 \to C_2$ étaient des transformées de trisécantes de C_1, et l'obstruction à la contraction de E_2 consistait en la présence de quadrisécantes, du fait que $-K_X$ s'exprimait par la formule $4H_1 - E_1$. Dans le cas actuel, où X est un éclaté de Q, on a $-K_X = 3H_1 - E_1$, ce qui résulte en ce que $\epsilon_1(E_2)$ doit être constitué des bisécantes de C_1 et l'obstruction à la contraction de E_2 est donnée par les trisécantes de C_1. Remarquons maintenant que, vu le degré de Q, toutes les trisécantes de C_1 dans $\mathbb{P}^4$ sont automatiquement contenues dans Q, donc pour savoir si C_1 possède des trisécantes dans Q, on peut appliquer la formule bien connue de la géométrie énumérative pour le nombre de trisécantes $\kappa(d, g)$ d'une courbe lisse irréductible C de $\mathbb{P}^4$ de degré d et de genre g, voir [41], p. 182 : $\kappa(d, g) = \binom{d-2}{3} - g(d-4)$. Cette formule donne le degré du cycle virtuel des trisécantes de C dans la grassmannienne Gr $(2, 5)$, ce qui entraîne deux conséquences suivantes : a) si $\kappa(d, g) = 0$, alors, ou bien C n'a aucune trisécante, ou bien le nombre de trisécantes est infini ; b) si $\kappa(d, g) \neq 0$, alors C a au moins une trisécante. Parmi les lignes de la table 2 de [46] couvertes par cette proposition, on trouve $\kappa(d, g) = 0$ dans un seul cas, numéro 17.
(ii) Dans ce cas on peut conclure par un argument simple suivant : les courbes C_i sont contenues dans la surface S, qui doit être transformée par ϵ_2 de façon isomorphe sur l'image, or ϵ_2 contracte les bisécantes de C_1 et donc $\epsilon_2(S)$ a une courbe de self-intersection. La contradiction obtenue démontre l'énoncé du point (ii).

□

Proposition 5.3.10. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface $K3$ diviseur anticanonique de $X = \tilde{Q}_C$, alors $S_0 = \epsilon(S) = Q \cap K \subset \mathbb{P}^4$ est une intersection complète de Q et d'une cubique K qui contient C.*

(ii) Une surface $K3$ générique dans l'espace de modules K_6^R, où R est le réseau $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 4 & d_C \\ d_C & 2g_C - 2 \end{pmatrix}$, est une intersection complète lisse d'une quadrique et d'une cubique de $\mathbb{P}^4$ contenant une telle courbe C. Cela entraîne, entre autre, que la surface $K3$ générique, qui est une intersection complète d'une quadrique et d'une cubique, a pour réseau de Picard R.

(iii) Dans une intersection complète lisse d'une quadrique et d'une cubique S_0 de $\mathbb{P}^4$ contenant C, générique dans K_6^R, les courbes équivalentes à C par déformations dans S_0, varient suivant les cas soit dans un seul système linéaire $|C|_{S_0}$, soit dans deux systèmes linéaires différents $|C|_{S_0}$ et $|C'|_{S_0}$.

Fixons $S_0 = Q_0 \cap K_0 \subset \mathbb{P}^4$ intersection complète lisse contenant C, générique dans K_6^R de sorte qu'elle vérifie la propriété du (iii). Soit $S \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^r$ le transformé strict de S_0, de sorte que p induit l'isomorphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_0$. Alors :

(iv) l'espace de modules $F_S^R = B$ est un ouvert de $\mathbb{P}^{g_C} = |C|_{S_0}$, respectivement de $\mathbb{P}^{g_C} \sqcup \mathbb{P}^{g_C} = |C|_{S_0} \sqcup |C'|_{S_0}$, et

(v) la jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la famille universelle $f : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction au-dessus de B de la fibration lagrangienne $h : M_{S_0}^H(0, C, 1 - g_C) \to \mathbb{P}^{g_C}$, respectivement $h : M_{S_0}^H(0, C, 1 - g_C) \sqcup M_{S_0}^H(0, C', 1 - g_C) \to \mathbb{P}^{g_C} \sqcup \mathbb{P}^{g_C}$.

Démonstration. Notons $\epsilon : X = \tilde{Q}_C \to Q$ le morphisme d'éclatement et $E \subset X$ le diviseur exceptionnel.
(i) : On a $K_X = -3H + E$. Soit $S \in |-K_X|$ irréductible. Alors $S_0 \in |-3H|_Q$ et contient $C = Q \cap Q_1 \cap Q_2$ (cf. proposition 5.1.6). Puisque Q est projectivement normale (cf. proposition 5.1.4), $S_0 = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^4$.
(ii) : La première assertion vient du fait que les propriétés :
— la classe $[H]$ est ample
— la classe $[C]$ est représentée par connexe lisse,
sont ouvertes pour la topologie de Zariski dans toute déformation de S_0 préservant l'algébricité des classes $[H]$ et $[C]$. Cela entraîne qu'une surface $K3$ générique dans l'espace de module K_6^R des surfaces $K3$ s'obtient par la construction donnée en (ii). Le théorème de Beauville ([6]) dit que le morphisme $s^R : \mathcal{F}^R \to K_6^R$ est génériquement surjectif, donc les surfaces $K3$ très générales de K_6^R, celles de nombre de Picard 2, ont bien une intersection non vide avec l'image de ce morphisme.
(iii) : Ce point sera traité famille par famille.

Famille 7 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V_{\mathbb{P}^4}(f_3, q)$ une intersection complète lisse contenant une intersection complète lisse $C = V_{\mathbb{P}^4}(q', q_1, q_2)$. C'est une surface $K3$ primitivement polarisée par la classe ample $H = O_{S_0}(1)$ de degré 6. On a $C = V(q', q_1, q_2) \subset S_0 = V(f_3, q)$ si et seulement si $q' = \lambda q$ et $f_3 = l_1 q_1 + l_2 q_2 + lq$. On a alors

$$Q_1 \cap S_0 = (Q_2 \cup H_2) \cap Q_1 \cap Q = C \cup (H_2 \cap Q_1 \cap Q) = C \cup C',$$

où $H_2 = V(l_2) \subset \mathbb{P}^4$ est l'hyperplan associé. La courbe $C' = H_2 \cap Q_1 \cap Q$ est une courbe elliptique de degré 4. On a ainsi $[C] + [C'] = 2H \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. De plus, $H_2 \cap S_0 = C' \cap C_0$, où $C_0 \subset S_0$ est une conique. On a ainsi $[C'] + [C_0] = H \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$.
Les nombres d'intersection dans S_0 sont $C^2 = 2g(C) - 2 = 8$, $H \cdot C = 8$, $H \cdot C' = 4$, $C'^2 = 0$, $H \cdot C_0 = 2$, $C_0^2 = -2$, $C' \cdot C_0 = (H - C_0) \cdot C_0 = 4$, $C \cdot C' = (2H - C') \cdot C' = 8$, et $C \cdot C_0 = (2H - C') \cdot C_0 = 0$.
La surface K_3 S_0 contient une conique C_0, un pinceau elliptique de degré 4, dans lequel varie C', et le système linéaire $|C_t|$ de courbes de genre 5 et de degré 8, dans lequel varie C et tel que $C_t \cap C_0 = \emptyset$ ou $C_0 \subset C_t$ car $C \cdot C_0 = 0$. Le réseau de Picard de S_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de rang 2 avec la forme d'intersection indiquée dans l'énoncé.

Si S_0 est générique dans K_6^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. La courbe C est lisse de genre $g(C) = 5$, donc $\dim\,(|C|_{S_0}) = 5$. De plus, la conique C_0, le pinceau elliptique de degré 4 dans lequel varie C' et le système linéaire $|C_t|_{S_0}$ de courbes de genre 5 et de degré 8 dans lequel varie C sont unique dans S_0. L'unicité de $|C_t|_{S_0}$, par exemple, suit du fait que le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = 6 \\ (aH + bC) \cdot H & = 6 \end{cases}$$

n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0, 1)$.

Famille 13 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^4$ une intersection complète lisse contenant une courbe lisse $C = V_{\mathbb{P}^4}(q, q_1, q_2, q_3)$ de genre 2 et de degré 6 qui est une intersection de quatre quadriques. On a $C = Q \cap F = V(q, q_1, q_2, q_3) \subset S_0 = V(f_3, q_0)$ si et seulement si $f_3 = l_0 q + \ldots + l_3 q_3$, où les $l_i \in S_4^1$ sont des formes linéaires et $q = \lambda q_0$, où $\lambda \in \mathbb{C}$, i.e. $Q = Q_0$. Pour $q_t \in \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$, où $\langle q_1, q_2, q_3 \rangle = \mathbb{P}^2 \subset H^0(\mathbb{P}^4, O(2))$ est le réseau engendré par q_1,q_2 et q_3, on a $S_0 \cap Q_t = C \cup C'_t$. Ainsi $\deg\,(C'_t) = 6$ et $[C] + [C'_t] = 2H \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. La surface K_3 S_0 contient deux réseaux de courbes de genre 2 et de degré 6, celui dans lequel varient les courbes C'_t et celui dans lequel varie la courbe C, et $C \cdot C'_t = 10$. Le réseau de Picard de la surface $K3$ S_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de rang 2 avec la forme d'intersection indiquée dans l'énoncé.

Si S_0 est générique dans K_6^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. Dans ce cas S_0 contient exactement deux réseaux de courbes de genre 2 et de degré 6, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = 0 \\ (aH + bC) \cdot H & = 6 \end{cases}$$

a exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}^2$, qui sont $(0, 1)$ et $(2, -1)$.

Famille 17 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^4$ une intersection complète lisse contenant une courbe elliptique (lisse) C de degré 5 dans $\mathbb{P}^4$. La surface K_3 S_0 contient un pinceau elliptique de degré 5, dans lequel varie la courbe C, et une droite. Le réseau de Picard de la surface $K3$ S_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de rang 2 avec la forme d'intersection indiquée dans l'énoncé.

Si S_0 est générique dans K_6^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. La surface K_3 S_0 contient alors un unique pinceau elliptique de degré 5, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = 0 \\ (aH + bC) \cdot H & = 5 \end{cases}$$

n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0, 1)$.

Famille 23 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = V(q_0, f_3) \subset \mathbb{P}^4$ une intersection complète lisse contenant une courbe lisse $C = V_{\mathbb{P}^4}(q, q', h)$. On a $C = V(q, q', h) \subset S_0 = V(q_0, f_3)$ si et seulement si $f_3 = lq + l'q' + q''h$ et $Q = Q_0$, l et l' étant des formes linéaires de $\mathbb{C}^5$. Alors $H \cap S_0 = C \cup C_0$, où $C_0 = V(q, l', h)$ est une conique telle que $\langle C_0 \rangle = \Lambda_0 = V(l', h) \subset \mathbb{P}^4$. Ainsi

$H = [C] + [C_0] \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Pour $t \in \mathbb{P}^1 \subset \mathrm{Gr}\,(4,5)$ paramétrant les hyperplans H_t, tels que $\Lambda_0 \subset H_t \subset \mathbb{P}^4$, on a $H_t \cap S_0 = C_t \cup C_0$ avec $\deg(C_t) = 4$. Ainsi $H = [C_t] + [C_0] \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Les nombres d'intersection dans S_0 sont $H^2 = 6$, $H \cdot C = 4$, $H \cdot C_0 = 2$, $C^2 = 0$, $C_0^2 = -2$, et $C \cdot C_0 = (H - C_0) \cdot C_0 = 0$. Puisque $C \cdot C_0 = 0$ et que C_t ne contient pas C_0, on a $C_t \cap C_0 = \emptyset$. On a $C_0 = \Lambda_0 \cap S_0$, donc $\Lambda_0 \cap C_t = \emptyset$. La surface $K3$ S_0 contient un pinceau elliptique, dans lequel varient les courbes C_t, et une conique C_0 avec $C_t \cap C_0 = \emptyset$. Le réseau de Picard de la surface $K3$ S_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de rang 2 avec la forme d'intersection indiquée dans l'énoncé.

Si S_0 est générique dans K_6^R, alors $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$. Dans ce cas, S_0 contient un seul pinceau elliptique de degré 4, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = 0 \\ (aH + bC) \cdot H & = 4 \end{cases}$$

a une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0,1)$. Ce qui termine la démonstration du point (iii).
(iv)-(v) : La démonstration est similaire à celle des parties (iv)-(v) des propositions 5.3.2-5.3.8. □

5.3.6 Les éclatés d'une quadrique de $\mathbb{P}^4$ à un point singulier en une union disjointe d'une courbe lisse et du point singulier

Il n'y a qu'une seule famille rentrant dans ce cas. C'est la **famille 2 de nombre de Picard 4**.

Les variétés de Fano sont les éclatés $X = \tilde{V}_{v,C}$ des cônes $V = V(q_V) \subset \mathbb{P}^4$ de sommet v au-dessus d'une surface quadrique lisse $\mathcal{R} = \Lambda_3 \cap V \subset \mathbb{P}^4$, en v et en une courbe elliptique $C = \Lambda_3 \cap V \cap Q$, qui est une section de V par un hyperplan Λ_3 de $\mathbb{P}^4$ ne passant pas par v et par une quadrique. On note $\epsilon_1 : \tilde{\mathbb{P}^4}_v \to \mathbb{P}^4$, $\epsilon_V : X = \tilde{V}_{v,C} \xrightarrow{\epsilon_{2,V}} \tilde{V}_v \xrightarrow{\epsilon_{1,V}} V$, les morphismes d'éclatement et $E_1^0 \subset \tilde{\mathbb{P}^4}_v$, $E_1 = E_1^0 \cap \tilde{V}_v \subset \tilde{V}_v$, $E_2 \subset X$ les diviseurs exceptionnels. Par ailleurs, $L_1 \subset V$, $L_2 \subset V$ désignent deux plans (passant par v) représentant les deux familles de plans de V. On note $\mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^4}(O_{\mathbb{P}^4}, P_C)$ le schéma de Hilbert de $\mathbb{P}^4$ dans lequel varie la courbe C, $\mathcal{C} \subset \mathrm{Quot}_{\mathbb{P}^4}(O_{\mathbb{P}^4}, P_C) \times \mathbb{P}^4$ la correspondance d'incidence. Soit r un entier positif et $p : \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^4$ la projection de sorte que, pour toute quadrique singulière $V \subset \mathbb{P}^4$ et toute courbe $C' \in \mathrm{Quot}_V(O_V, P_C)$, le morphisme d'éclatement se factorise par $\epsilon_V : \tilde{V}_{v,C'} \hookrightarrow V \times \mathbb{P}^r \xrightarrow{p} V$ (cf. lemme 5.1.7).

Par ailleurs on notera par A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, par S une surface K3 dans le système linéaire $|-K_X|$, par S_0, resp. S_1 son image dans V, resp. $\tilde{V}_v$. Remarquons que $\epsilon_{2,V}$ induit l'isomorphisme $S \simeq S_1$ et que $\epsilon_{2,V}|_{S_1} : S_1 \to S_0$ contracte la (-2)-courbe $E_1' = E_1 \cap S_1$ en le point singulier ordinaire double de S_0, qui est le sommet du cône v.

Lemme 5.3.11. *Soit $\phi : X = \tilde{V}_{v,C} \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{V}_{v,C'}$ un isomorphisme, où $C \subset V$ et $C' \subset V$ sont des courbes elliptiques comme ci-dessus et notons $\epsilon = \epsilon_1 \circ \epsilon_2 : X \to V$ et $\epsilon' = \epsilon_1 \circ \epsilon_2' : X' \to V$ les morphismes d'éclatement. Si $S \subset X$ est un diviseur anticanonique lisse tel que ϵ_2 et $\epsilon_2' \circ \phi$ induisent des isomorphismes de S sur son image, alors ϕ descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de V tel que $\overline{\phi}(C) = C'$, c'est à dire que les contractions $\epsilon : X \to V$ et $\epsilon' \circ \phi : X \to V$ sont équivalentes.*

Démonstration.

La Table 4 de [46] montre qu'il existe deux contractions non équivalentes d'une variété de Fano X de ce type sur $\tilde{V}_v$, tandis que la contraction $\tilde{V} \to V$ est unique (modulo automorphismes de V). On note $\epsilon_2 : X \to \tilde{V}_v$, $\tilde{\epsilon}_2 : X \to \tilde{V}_v$ ces deux contractions, E_2, $\tilde{E}_2$ leurs diviseurs exceptionnels, $\epsilon = \epsilon_1 \circ \epsilon_2$, $\tilde{\epsilon} = \epsilon_1 \circ \tilde{\epsilon}_2$ les composées respectives. On trouve facilement la description géométrique d'un diviseur exceptionnel dans X, différent de E_2, qui admet une contraction sur une courbe elliptique : c'est le transformé strict dans X du cône de sommet v sur la quartique elliptique $C_0 = \epsilon(E_2) = \Lambda_3 \cap Q \cap V$. Effectivement, la classe anticanonique de X étant $-K_X = 3H - E_1 - E$, les transformées strictes f des génératrices de ce cône dans X intersectent E_1 et E transversalement en un point, donc $-K_X \cdot f = 1$ et la classe de f engendre un rayon extrémal du cône de Mori de X. Le résultat de contraction de $\tilde{E}_2$ possède une unique quadrique exceptionnelle $\tilde{E}_1$, qui est la transformée stricte de $\mathcal{R} = \Lambda_3 \cap V$, et en la contractant, on obtient la variété isomorphe a V. En nous appuyant sur l'unicité de la deuxième contraction, affirmée par Mori-Mukai, nous identifions cet autre diviseur exceptionnel dans X avec $\tilde{E}_2$. Notons $S_1 = \epsilon_2(S)$, $\tilde{S}_1 = \tilde{\epsilon}_2(S)$ et $S_0 = \epsilon(S_1)$. La restriction de $\tilde{E}_2$ à S est égale à $C + C' + 2E_1'$, où C' est la courbe telle que $Q \cap S_0 = C \cup C'$

et $E_1' = E_1 \cap S_1$, ce qui entraîne la conclusion absurde que $\tilde{S}_1$ est non normale à une courbe de singularités de multiplicité 4. Cette contradiction démontre le lemme.

□

Proposition 5.3.12. *(i) Si $S \in |-K_X|$ est une surface K3 contenue dans $X = \tilde{V}_{v,C}$, alors $S_0 = \epsilon(S) = V(f_3, q_V) \subset \mathbb{P}^4$ est une section de V par une cubique qui contient C et v.*

(ii) Soient $S_0 = V(f_3, q_V) \subset \mathbb{P}^4$ une intersection complète d'un cône quadratique $V = V(q_V)$ et d'une cubique lisse $V(f_3)$, passant par v et contenant une courbe elliptique $C = \Lambda_3 \cap V \cap Q$ telle que $v \notin C$. Ainsi S_0 a un point double ordinaire en v. On choisit S_0 générique de sorte qu'elle a pour seule singularité un point double ordinaire en v et que les $L_i \cap S_0 = L_i \cap V(f_3)$ soient lisses. Le transformé strict $S_1 \subset \tilde{V}_v$ de S_0 est alors une surface K3 lisse contenant un pinceau elliptique $|C|_{S_1}$, et le réseau de Picard de S_1 contient le sous-réseau primitif de rang quatre $R = \mathbb{Z}[L_1'] \oplus \mathbb{Z}[L_2'] \oplus \mathbb{Z}[E_1'] \oplus \mathbb{Z}[C]$, où $E_1' = S_1 \cap E_1 \subset \tilde{V}_v$ est le diviseur exceptionnel de S_1 et $L_i' \subset S_1$ sont les transformés stricts de $L_i \cap S_0$. La forme d'intersection de R dans la base L_1', L_2', E_1', C est donnée par la matrice A. Une surface K3 S_1 générique dans K^R s'obtient par cette procédure. Cela entraîne, entre autre, que la surface K3 générique obtenue par cette procédure a pour réseau de Picard R.

(iii) Pour un choix générique de S_1, il y a exactement deux pinceaux elliptiques sur S_1 dont les membres génériques sont les images réciproques dans S_1 de quartiques elliptiques dans V ne passant par v. Si l'un est $|C|$, l'autre est $|2H - 2E_1' - C|$.

Fixons maintenant une surface $S_0 = \epsilon(S) = V(f_3, q)$, comme dans (ii), contenant une courbe elliptique $C = \Lambda_3 \cap V \cap Q$ telle que $v \notin C$, et notons par L_i, $i = 1, 2$ deux plans des deux familles différentes dans V. Soient $S_1 \subset \tilde{\mathbb{P}}^4_v$ la transformée stricte de S_0 et $S \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^r$ celle de S_1, de sorte que on a les morphismes $p : S \xrightarrow{\sim} S_1 \to S_0$. Alors, pour un choix générique de S_0, de sorte que $S \simeq S_1$ soit générique dans K^R et vérifie la propriété du (iii), on a :

(iv) l'espace de modules $F_S = B$ est une ouvert de $|C|_{S_1} = \mathbb{P}^1$, et

(v) la jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la famille universelle $f : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction au-dessus de B de la fibration lagrangienne naturelle $h : M_{S_1}^{aH-E_0'}(0, [C], 0) \to \mathbb{P}^1$.

Démonstration. (i) : Calculons le fibré canonique de $\tilde{V}_v \subset \tilde{\mathbb{P}}^4_v$. On a $\epsilon_1^{-1}(V) = \tilde{V}_v \cup E_1^0 \subset \tilde{\mathbb{P}}^4_v$, $\tilde{V}_v$ étant le transformé strict de V. Donc $[\tilde{V}_v] = \epsilon^*[V] - 2[E_1^0] = 2H - 2[E_1^0] \in \mathrm{Pic}\,(\tilde{\mathbb{P}}^4_v)$. D'autre part $K_{\tilde{\mathbb{P}}^4_v} = -5H + 3[E_1^0] \in \mathrm{Pic}\,(\tilde{\mathbb{P}}^4_v)$. On en déduit $K_{\tilde{V}_v} = K_{\tilde{\mathbb{P}}^4_v} |\tilde{V}_v + [\tilde{V}_v]_{|\tilde{V}_v} = -3H + [E_1] \in \mathrm{Pic}\,(\tilde{V}_v)$. Donc $K_X = \epsilon_2^* K_{\tilde{V}_v} - [E_2] = -3H + [E_1] + [E_2] \in \mathrm{Pic}\,(X)$. Soit $S \in |-K_X|$ irréductible. On pose $S_1 = \epsilon_{2,V}(S) \subset \tilde{V}_v$ et $S_0 = \epsilon_V(S) = \epsilon_{1,V}(S_1) \subset V$, on a $[S_0] = \epsilon_{V*}[S] = 3H \in \mathrm{Pic}\,(V)$ et d'après la proposition 5.1.6, $C \subset S_1$ et $v \in S_0$. Donc $C = \epsilon_{1,V}(C) \subset S_0$, S_1 est le transformé strict de S_0 et S est le transformé strict de S_1. Puisque $V \subset \mathbb{P}^4$ est projectivement normale, $S_0 = V(f_3, q_V) \subset \mathbb{P}^4$ est une section de V par une cubique.

(ii) : Soient $S_0 = V(f_3, q_V) \subset \mathbb{P}^4$ et $C = \Lambda \cap V \cap Q$ comme dans l'énoncé. On choisit S_0 générique de sorte que $L_i \cap S_0 = L_i \cap V(f_3)$ soient lisses. On a $C = \Lambda \cap V \cap Q = V(h, q_V, q) \subset S_0 = V(f_3, q_V)$ si et seulement si $f_3 = hq' + lq_V + l'q$. Alors $Q \cap S_0 = C \cup C'$, où $C' = V(q', q_V, q) = V \cap Q \cap Q'$ est une courbe de degré 8 et de genre arithmétique $p_a(C') = 5$ qui est une intersection complète de trois quadriques. Ainsi $[C] + [C'] = 2H \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Soit S_1 le transformé strict de S_0, qui est une surface K3 polarisée par $3H - E_1'$. En notant encore $C = \epsilon^{-1}(C) \subset S_1$ (C ne passe pas par v) et $C'^t = \epsilon^{-1}(C') \subset S_1$, on a $[C] + [C'^t] = 2H \in \mathrm{Pic}\,(S_1)$. La surface K3 S_1 contient un pinceau elliptique $|C|$, tel que $H \cdot C = 4$, et un système linéaire $|C'^t|$ de courbes de genre 5 tels que $H \cdot C'^t = 8$. Dans S_1, on a $C^2 = 2g(C) - 2 = 0$, $\;C'^2 = 2p_a(C'^t) - 2 = 2p_a(C') - 2 = 8$, $\;C \cdot C'^t = C \cdot C'^t + C^2 = C \cdot (C + C'^t) = 2H \cdot C = 8$, $E_1' \cdot C = 0$, et $E_1' \cdot C'^t = E_1' \cdot (2H - C) = 0$. Les courbes L_1', L_2' sont des cubiques planes, donc des courbes elliptiques, passant par v ; après l'éclatement de v elles rencontrent E_1' en un point. Donc $(L_i')^2 = 0$ et $L_i' \cdot E_1' = 1$. Puis, $L_1' \cap L_2' = L_1 \cap L_2 \cap V(f_3)$ est l'intersection de la cubique $\{f_3 = 0\}$ avec la droite $L_1 \cap L_2$, formée de trois points, mais l'un de ces trois points est v et disparaît donc lors de l'éclatement de v. On a donc $L_1' \cdot L_2' = 2$. Puis, $E_1' \simeq \mathbb{P}^1$, donc $(E_1')^2 = -2$; on a aussi $C \cdot E_1' = 0$ car C se trouve dans un plan Λ_3 ne passant pas par v, et $C \cdot L_i' = 2$ car $C \cap L_i' = \Lambda_3 \cap L_i \cap Q$ est l'intersection de la droite $\Lambda_3 \cap L_i$ avec la quadrique Q, formée de deux points. Avec $C^2 = 0$, cela donne la matrice A ci-dessus. On note aussi la relation $H = L_1' + L_2' + E_1'$ dans Pic S. D'ailleurs, les classes L_1', L_2', E_1, C engendrent l'image R de Pic X dans Pic S, car L_1, L_2, E_1, E engendrent Pic X.

Donc le réseau qu'on a décrit est bien un sous-réseau primitif de Pic S. Le réseau de Picard de S_1 contient donc le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[L'_1] \oplus \mathbb{Z}[L'_2] \oplus \mathbb{Z}[E'_1] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de rang 4, dont la forme d'intersection est donnée par A.
(iii) Si S_1 est générique dans K^R, $\mathrm{Pic}\,(S_1) = \mathbb{Z}[L'_1] \oplus \mathbb{Z}[L'_2] \oplus \mathbb{Z}[E'_1] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est de rang 4. Dans ce cas, le système

$$\begin{cases} (aL'_1 + bL'_2 + cE'_1 + dC)^2 & = 0 \\ (aL'_1 + bL'_2 + cE'_1 + dC) \cdot H & = 4 \\ (aL'_1 + bL'_2 + cE'_1 + dC) \cdot E'_1 & = 0 \end{cases}$$

a exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}^4$, qui sont $(0,0,0,1)$ et $(2,2,0,-1)$.
(iv)-(v) : Ces points se démontrent comme dans les propositions 5.3.2 à 5.3.10. □

5.3.7 Les autres cas d'éclatés où la jacobienne de la variété qu'on éclate est nulle

Éclaté de V_5 en une courbe lisse

Il n'y a qu'une seule famille dans ce cas, c'est la **famille 14 de nombre de Picard 2**.

Les variétés de Fano sont les éclatés $X = \tilde{V}_C$ d'une section linéaire $V = \mathrm{Gr}\,(2,5) \cap \Lambda_6 \subset \mathbb{P}^9$ de la grassmannienne $\mathrm{Gr}\,(2,5)$ en une courbe elliptique $C = \Lambda_4 \cap V$ de degré 5, une section linéaire de V par un sous-espace linéaire Λ_4 de dimension 4 contenu dans le sous-espace linéaire Λ_6 de dimension 6. On note $\epsilon : X = \tilde{V}_C \to V$ le morphisme d'éclatement.

Lemme 5.3.13. *Un isomorphisme $\phi : X = \tilde{V}_C \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{V}_{C'}$, où $C \subset V$ et $C' \subset V$ sont des courbes elliptiques comme indiquée ci-dessus, descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de V tel que $\overline{\phi}(C) = C'$, c'est à dire que les contractions $\epsilon : X \to V$ et $\epsilon' \circ \phi : X \to V$ sont équivalentes, $\epsilon : X \to V$ et $\epsilon' : X' \to V$ désignant les morphismes d'éclatement.*

Démonstration.
Dans ce cas, comme montre la table 2 de [46], la contraction $X \to V$ est unique. □

Proposition 5.3.14. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface $K3$ contenue dans $X = \tilde{V}_C$ en tant que diviseur anticanonique, alors $S_0 = \epsilon(S)$ est une surface K3 de la forme $Q \cap \mathrm{Gr}\,(2,5) \cap \Lambda_6 \subset \mathbb{P}^9$, contenant C, où Q est une hypersurface quadrique de Λ_6.*

(ii) Soit $S_0 = Q \cap \mathrm{Gr}\,(2,5) \cap \Lambda_6 \subset \mathbb{P}^9$ une intersection complète lisse contenant une courbe elliptique $C = \Lambda_4 \cap V$ de degré 5, où Λ_4 est un sous-espace linéaire de dimension 4 contenu dans Λ_6. Alors S_0 est une surface $K3$ de K^R_{10}, où $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ a pour forme d'intersection $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, S_0 contient deux pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$ et $|C'|_{S_0}$. Une surface $K3$ S_0, générique dans K^R_{10}, s'obtient par cette construction. Cela entraîne, entre autre, que la surface $K3$ générique obtenue par cette construction a pour réseau de Picard R.

(iii) Pour un choix générique de $S_0 \in K^R_{10}$, $|C|_{S_0}$ et $|C'|_{S_0}$ sont les seuls pinceaux elliptiques de degré 5.

Fixons une intersection complète $S_0 = Q_0 \cap \mathrm{Gr}\,(2,5) \cap \Lambda_6 \subset \mathbb{P}^9$ lisse contenant une courbe elliptique $C = V \cap \Lambda_4$ de degré 5, où $\Lambda_4 \subset \Lambda_6$, générique dans K^R_{10} de sorte qu'elle vérifie la propriété du (iii). Alors :

(iv) l'espace de modules $F^R_S = B$ est un ouvert de $|C|_{S_0} \sqcup |C'|_{S_0} = \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$, et

(v) la restriction au-dessus de B de la fibration lagrangienne $h : M^H_{S_0}(0,[C],0) \sqcup M^H_{S_0}(0, H-[C], 0) \to \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$ s'identifie à la jacobienne intermédiaire relative $J(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la famille universelle $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique.

Démonstration. Notons $E \subset X$ le diviseur exceptionnel de $X = \tilde{V}_C$.
(i) : On a $K_X = -2H + E$. Soit $S \in |-K_X|$. Alors, d'après la proposition 5.1.6 (ii), $S_0 = \epsilon(S) \in |2H|_V$ et contient C. Par la normalité projective de V, $S_0 = V \cap Q \subset \mathbb{P}^9$.
(ii) : Soit $S_0 = V \cap Q \subset \mathbb{P}^9$ lisse contenant une courbe elliptique $C = \Lambda_4 \cap V$ où $\Lambda_4 \subset \Lambda_6$. C'est une surface $K3$ de K_{10} primitivement polarisée par H de degré 10. Puisque $C = V \cap \Lambda_4 \subset S_0$, la quadrique $Q \cap \Lambda_6 \subset \Lambda_6$ est de rang 3 (cône de sommet un plan projectif au-dessus d'une quadrique lisse de dimension 2) contenant Λ_4. On a $\Lambda_4 \cap S_0 = C \cup C'$. Ainsi $H = [C] + [C'] \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Les intersections dans S_0 sont : $H^2 = 10$, $H \cdot C = H \cdot C' = 5$, $C^2 = 0$, $C'^2 = 0$, $C \cdot C' = (H - C') \cdot C' = H \cdot C' = 5$. La surface $K3$ S_0 contient donc deux pinceaux elliptiques C_t

et C'_t de degré 5. Puisque $C \cdot C' = 5$, $C_t \cap C'_t = \{5 \text{ points }\}$. Le réseau de Picard de S_0 contient donc le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ dont la forme d'intersection est celle de l'énoncé.
(iii) Une surface $K3$ S_0 générique dans K_6^R est de réseau de Picard R. Dans ce cas, elle contient exactement deux pinceaux elliptiques de degré 5, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = 0 \\ (aH + bC) \cdot H & = 5 \end{cases}$$

admet deux solutions dans $\mathbb{Z}^2$, qui sont $(0, 1)$ et $(1, -1)$.
(iv)-(v) : La démonstration de ces points est similaires à celle des points (iv)-(v) des propositions 5.3.2-5.3.12. □

Éclaté de $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ en l'union disjointe d'une courbe lisse et de son point singulier

Il n'y a qu'une seule famille rentrant dans ce cas : c'est la **famille 9 de nombre de Picard 3**.

Les variétés de Fano sont les éclatés $X = \tilde{V}_{v,C}$ de $V = \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ en le sommet $v = [0, 0, 0, 1]$ et en une courbe de genre 3, qui est une quartique lisse C contenue dans le plan $\mathcal{R} = V(x_3) = \mathbb{P}(1, 1, 1) \simeq \mathbb{P}^2$ ne passant pas par v. On note $i_V : V = \mathbb{P}(1, 1, 1, 2) \hookrightarrow \mathbb{P}^6$ le plongement donné par le système linéaire $|O_V(2)|$. Notons $\mathrm{Quot}_V(O_V, P_C)$ le schéma de Hilbert dans lequel varie la courbe C et $\mathcal{C} \subset \mathrm{Quot}_V(O_V, P_C) \times \mathbb{P}^6$ la correspondance d'incidence. Notons $\epsilon : X = \tilde{V}_{v,C} \xrightarrow{\epsilon_2} \tilde{V}_v \xrightarrow{\epsilon_1} V$ la composée de deux éclatements, $E_1 \subset \tilde{V}_v$, $E_2 \subset X$ les diviseurs exceptionnels. Soit r un entier positif et $p : \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^6$ la projection, de sorte que, pour toute courbe $C' \in \mathrm{Quot}_V(O_V, P_C)$, le morphisme d'éclatement se factorise par $\epsilon : \tilde{V}_{v,C'} \hookrightarrow V \times \mathbb{P}^r \xrightarrow{p} V$ (cf. lemme 5.1.7).

On a $\tilde{V}_v = \mathbb{P} = \mathbb{P}(O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(2))$. On note $\mathcal{L} = O_{\mathbb{P}/\mathbb{P}^2}(1)$ et $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}^2$ la projection naturelle. Notons $H = c_1(\mathcal{L})$ et $h = c_1(\pi^* O_{\mathbb{P}^2}(1))$. Alors la suite exacte d'Euler relative et l'égalité $\omega_{\mathbb{P}} = \omega_{\mathbb{P}/\mathbb{P}^2} \otimes \pi^* \omega_{\mathbb{P}^2}$ donnent $-K_{\mathbb{P}} = 2H + h$. On introduit les coordonnées homogènes η_0 et η_1 sur $\mathbb{P}$, en utilisant l'isomorphisme canonique $\pi_* \mathcal{L} = O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(2) : \eta_0 = H^0(\mathbb{P}, \mathcal{L}) = H^0(\mathbb{P}^2, O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(2))$ $\eta_1 = H^0(\mathbb{P}, \mathcal{L} \otimes \pi^* O_{\mathbb{P}^2}(-2)) = H^0(\mathbb{P}^2, O_{\mathbb{P}^2}(-2) \oplus O_{\mathbb{P}^2})$, où η_0, η_1 est une section de $\mathcal{L}$, resp. de $\mathcal{L} \otimes \pi^* O_{\mathbb{P}^2}(-2)$, qui donne une base du facteur $O_{\mathbb{P}^2}$ de la somme directe sur $\mathbb{P}^2$ après l'application de π_*. On a alors deux sections de la projection π naturelle : $E_1 = V_{\mathbb{P}}(\eta_1)$, $N_{E_1/\mathbb{P}} = O_{\mathbb{P}_2}(-2)$, $\mathcal{R} = V_{\mathbb{P}}(\eta_0)$, $N_{\mathcal{R}/\mathbb{P}} = O_{\mathbb{P}_2}(2)$, et $[\mathcal{R}] = H = E_1 + 2h \in \mathrm{Pic}\,(\mathbb{P})$.

On considère également une surface $K3$ $S \in |-K_X|$, contenue dans $X = \tilde{V}_{v,C}$ en tant que diviseur anticanonique, et on note $S_1 = \epsilon_2(S)$. On remarque que $S_1 \in |-K_{\mathbb{P}}| = |2H + h|$.

Lemme 5.3.15. *Soit $\phi : X = \tilde{V}_{v,C} \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{V}_{v,C'}$ un isomorphisme, où $C \subset V$ et $C' \subset V$ sont des quartiques lisses comme ci-dessus et notons $\epsilon = \epsilon_1 \circ \epsilon_2 : X \to V$ et $\epsilon' = \epsilon_1 \circ \epsilon'_2 : X' \to V$ les morphismes d'éclatement. Si $S \subset X$ est un diviseur anticanonique lisse tel que ϵ_2 et $\epsilon'_2 \circ \phi$ induisent des isomorphismes de S sur son image, alors ϕ descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de V tel que $\overline{\phi}(C) = C'$, c'est à dire que les contractions $\epsilon : X \to V$ et $\epsilon' \circ \phi : X \to V$ sont équivalentes.*

Démonstration.
La table 3 de [46] montre que dans ce cas il existe deux façons non équivalentes de contracter X sur $\mathbb{P}$. La première, c'est la contraction $\epsilon_2 : X \to \mathbb{P}$ de E sur C. Pour décrire la seconde, remarquons que si on note par le même symbole $\mathcal{R} \subset X$ le transformé strict de $\mathcal{R} = V_{\mathbb{P}}(\eta_0)$ dans X, alors $N_{\mathcal{R}/X} = N_{\mathcal{R}/\mathbb{P}}(-C) \simeq O_{\mathbb{P}^2}(-2)$. Donc $\mathcal{R}$ devient diviseur exceptionnel dans X qui peut être contracté en un point singulier du type de sommet du cône de Véronèse sur $\mathbb{P}^2$. De façon similaire, les fibres du fibré projectif $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}^2$ passant par des points x de C se relèvent (dans le sens de transformée stricte) dans X comme des courbes $f_x \simeq \mathbb{P}^1$ telles que $-K_X \cdot f_x = 1$, et engendrent donc un rayon extrémal du type birationnel I_a dans la notation de Mori. La surface réglée E_C formée des courbes f_x $(x \in C)$ est un diviseur exceptionnel, isomorphe à E_1 mais différent de E_1, qui peut être contracté par la contraction de Mori $\epsilon_C = \mathrm{cont}_{[f_C]} : X \to Y$. Comme E_C coupe E_1 par une quartique isomorphe à C, $N_{\epsilon_C(E_1)/Y} = N_{E_1/X}(2) \simeq O_{\mathbb{P}^2}(2)$. Donc $\epsilon_C(E_1)$ n'est plus exceptionnel dans Y. Par contre, $E_C \cap \mathcal{R} = \emptyset$ dans X et $\epsilon_C(\mathcal{R})$ reste exceptionnel dans Y. On conclut que Y est, comme $\mathbb{P}$, le projectivisé de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$, mais maintenant les rôles de E_1, $\mathcal{R}$ sont permutés.

Cette deuxième contraction $\epsilon_C : X \to Y = \mathbb{P}$ contracte en des points les courbes f_x, $x \in C$. Puisque la classe de $\pi^{-1}(x)$ dans $\mathbb{P}$ est h^2 et la classe de S_1 est $2H + h$, et que $h^3 = 0$, $H^2 \cdot h = 1$ dans $\mathbb{P}$, on voit que $(\pi^{-1}(x) \cdot S_1)_{\mathbb{P}} = 2$, c'est à dire $\pi|_{S_1} : S_1 \to \mathbb{P}^2$ est un revêtement double. Par construction, $\pi^{-1}(C)$ se décompose en deux courbes isomorphes, dont l'une, contenue dans $\mathcal{R}$, est notée par le même symbole C, et l'autre est $C' = \tau(C)$, où τ dénote l'involution de Galois du revêtement double $\pi|_{S_1}$. On voit que la contraction ϵ_C de la famille des courbes f_x, $x \in C$, identifie les points x et $\tau(x)$ pour $x \in C$. Donc l'image de S par cette contraction a une courbe de points doubles $\epsilon_C(C) = \epsilon_C(C')$, ce qui est absurde, car par l'hypothèse la contraction doit envoyer S sur son image de façon isomorphe. Cela termine la démonstration. ☐

Proposition 5.3.16. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface $K3$ contenue dans $X = \tilde{V}_{v,C}$ en tant que diviseur anticanonique, alors $S_1 = \epsilon_2(S) = V_{\mathbb{P}}(s_0)$, où $s_0 = f_1(x)\eta_0^2 + f_3(x)\eta_0\eta_1 + f_4(x)g_1(x)\eta_1^2$ avec $x \in \mathbb{P}^2$ (elle contient $C = V_{\mathbb{P}^2}(f_4)$).*

(ii) Soit $S_1 = V_{\tilde{V}_v}(f_1(x)\eta_0^2 + f_3(x)\eta_0\eta_1 + f_4(x)g_1(x)\eta_1^2)$ lisse. Notons $E_1' = S_1 \cap E_1 \subset \tilde{V}_v$ le diviseur exceptionnel de S_1 et $h' = i^*_{S_1/\mathbb{P}}\pi^*O_{\mathbb{P}^2}(1)$. Alors S_1 est une surface $K3$ dont le réseau de Picard contient le sous-réseau primitif de rang trois $R = \mathbb{Z}[h'] \oplus \mathbb{Z}[E_1'] \oplus \mathbb{Z}[C]$, muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. La surface $K3$ S_1 contient le système linéaire $|C|_{S_1}$ de courbes de genre 3. Une surface $K3$ générique dans K^R s'obtient par cette construction. Cela entraîne entre autre que la surface $K3$ générique obtenue par cette construction a pour réseau de Picard R.

(iii) Si S_1 est générique dans K^R, $|C|_{S_1}$ est le seul système linéaire de courbes de genre 3 tel que $h' \cdot C = 4$ et dont les membres sont d'intersection nulle avec E_1'.

Fixons un diviseur lisse $S_1 = V(f_1(x)\eta_0^2 + f_3(x)\eta_0\eta_1 + f_4(x)g_1(x)\eta_1^2) \subset \tilde{V}_v$. Soit $S \subset V \times \mathbb{P}^r$ le transformé strict de S_1, de sorte que p induit le morphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_1 \to S_0$. Alors, pour un choix générique de S_1 de sorte qu'elle vérifie la propriété (iii),

(iv) l'espace de modules $F_S^R = B$ est un ouvert de $|C|_{S_1} = \mathbb{P}^3$, et

(v) la jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la famille universelle $f : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard contenant S en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction au-dessus de B de la fibration lagrangienne $h : M^H_{S_1}(0, C, -2) \to \mathbb{P}^3$.

Démonstration.
(i) : Soit $S \in |-K_X|$ irréductible. On a $K_X = \epsilon^*K_V + 2E_1 + E_2$. Donc $[S] = -\epsilon^*K_V - 2E_1 - E_2 \in \operatorname{Pic}(X)$. Notons $S_1 = \epsilon_1(S) \subset \tilde{V}_v$ et $S_0 = \epsilon(S) = \epsilon_0(S_1) \subset V$. Alors $[S_0] = \epsilon_*[S] = -K_V = O_V(5) \in CH_1(V)$, S_1 contient C et S_0 contient x et C. Le fait que $(E_1'^2)_{S_1} = (E_1 \cdot E_1 \cdot S)_{\tilde{V}_v} = -2$ montre que S_0 possède une singularité quadratique en x. Ainsi $S_0 = V(s_0) \subset V = \mathbb{P}(1,1,1,2)$, où $s_0 \in H^0(V, O_V(5))$. On a $s_0 = f_5(x_0,x_1,x_2) + x_3f_3(x_0,x_1,x_2) + x_3^2f_1(x_0,x_1,x_2)$, les éléments $f_5, f_3, f_1 \in \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_4]$ ayant pour degré 5,3,1 respectivement et étant indépendant de la variable x_3. On a : S_0 contient $C = V_{\mathbb{P}(1,1,1,2)}(f_4, x_3)$ si et seulement si $f_5 = f_4g_1$, où $g_1(x_0,x_1,x_2)$ est une forme linéaire. Dans $\tilde{V}_v = \mathbb{P}$, on a donc $S_1 = V(s_0)$, où $s_0 = f_1(x_0,x_1,x_2)\eta_0^2 + f_3(x_0,x_1,x_2)\eta_0\eta_1 + f_4(x_0,x_1,x_2)g_1(x_0,x_1,x_2)\eta_1^2$.
(ii) : Le morphisme $\pi \circ i_{S_1/\tilde{V}_v} : \tilde{V}_v \to \mathbb{P}^2$ est un revêtement double. On a $E_1' = E_1 \cap S_1 = V_{\tilde{V}_v}(\eta_1, s_0)$ et $\mathcal{R} \cap S_1 = V_{\tilde{V}_v}(\eta_0, s_0) = C \cup V_{\tilde{V}_v}(\eta_0, g_1)$. Les intersections dans S_1 sont : $h'^2 = 2$, $h' \cdot C = 4$, $h' \cdot E_1 = 1$, $C \cdot E_1 = 0$. Le groupe de Picard de S_1 contient donc le sous-réseau R de rang trois muni de la forme d'intersection comme dans l'énoncé. Les propriétés :

— la classe $[h']$ est ample,
— la classe $[C]$ est représentée connexe lisse,
— la classe $[E_1']$ est représentée par une courbe rationnelle lisse

sont ouvertes pour la topologie de Zariski dans toute déformation de S_1 préservant l'algébricité des classes $[h']$, $[C]$ et $[E_1']$. Cela entraîne qu'une surface $K3$ générique dans l'espace de module K^R des surfaces $K3$ s'obtient par cette construction. Le théorème de Beauville ([6]) dit que le morphisme $s^R : \mathcal{F}^R \to K^R$ est génériquement surjectif, donc les surfaces $K3$ très générales de K^R, celles de nombre de Picard 3, ont bien une intersection non vide avec l'image de ce morphisme.
(iii) Une surface $K3$ S_1 générique dans K^R a pour nombre de Picard 3. Dans ce cas, elle ne contient q'un seul réseau de courbes de genre 3 tel que $h' \cdot C = 4$ dont les membres sont d'intersection vide avec E_1' ou contiennent

E_1', car le système

$$\begin{cases} (aH+bC+cE_1')^2 & = 4 \\ (aH+bC+cE_1')\cdot h' & = 4 \\ (aH+bC+cE_1')\cdot E_1' & = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0,1,0)$.

Fixons un diviseur lisse $S_1 = V(f_1(x)\eta_0^2 + f_3(x)\eta_0\eta_1 + f_4(x)g_1(x)\eta_1^2) \subset \tilde{V}_v$. On choisit S_1 générique de sorte que $|C|_{S_1}$, où $C = V_{\tilde{V}_v}(f_4, \eta_0)$, soit le seul réseau de courbes de genre 3 tel que $h' \cdot C =$ et $E_1' \cdot C = 0$. Soit $S \subset V \times \mathbb{P}^r$ le transformé strict de S_1, de sorte que p induit le morphisme $p : S \xrightarrow{\sim} S_1 \to S_0$.
(iv) : Soit X une extension de Fano de S. Ainsi $X = \tilde{V}_{v,C'}$ contient S en tant que diviseur anticanonique. D'après le point (i), $S_0 = \epsilon(S)$ contient C' et $V = V_0$. La famille

$$f : \mathcal{X} \subset (\widetilde{\mathbb{P}^1 \times V_0})_{\mathcal{C}_{S_0} \cup (\mathbb{P}^1 \times \{v\})} \to \mathbb{P}^1 = |C|_{S_0} = |C|_{S_1},$$

où $\mathcal{C}_{S_0} = \mathcal{C} \cap (\mathbb{P}^1 \times S_0)$ est la correspondance d'incidence, contient donc toutes les extensions de Fano de S. La fibre de f au-dessus de $t \in \mathbb{P}^1$ est l'éclaté $X_t = \tilde{V}_{v,C_t}$ de V_0 en C_t qui contient le transformé strict S de S_0 en tant que diviseur anticanonique (cf. proposition 5.1.6 (iii)). Soit $B \subset \mathbb{P}^{g_C}$ l'ouvert des $t \in \mathbb{P}^1$ tels que $C_t \subset S_0$ est lisse. On a ainsi un morphisme surjectif de champs algébriques $r : B \to \mathcal{F}_S^R$. Le fait que ce morphisme est étale se démontre comme dans le point (iv) de la proposition 5.3.2. L'injectivité se déduit du Lemme 5.3.15 par des arguments standard utilisés dans les démonstrations des points (iv) des propositions 5.3.2–5.3.14.
(v) : La preuve de ce point est identique à celle du point (v) des proposition 5.3.2–5.3.14. □

Remarque 5.3.17. *Remarquons que, bien que S_0 contienne un second système linéaire $\mathbb{P}^3$ de courbes C' de genre 3, l'éclatement de C' n'est pas une variété de Fano. Effectivement, le critère de la proposition 2.14 de [45], qui permet, dans certains cas, de conclure que l'éclatement d'une courbe est de Fano, ne s'applique pas, car les courbes C' du second système sont découpées dans $\mathbb{P}$ par deux diviseurs des classes $4h$ et $H+h$ qui n'engendrent pas un sous-système linéaire de $|-K_{\mathbb{P}} - h|$ définissant C' comme sous-schéma de $\mathbb{P}$.*

Éclaté d'un diviseur lisse $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ de type $(1,1)$ en une courbe lisse

Il n'y a qu'une famille rentrant dans ce cas : c'est la **famille 7 de nombre de Picard 3**.

Les variétés de Fano sont les éclatés $X = \tilde{W}_C$ des diviseurs lisses $W = V(h_{1,1}) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ en une courbe elliptique $C = V(l_{11}', l_{11}'', h_{11})$ intersection de trois diviseurs L_{11}', L_{11}'', W de bidegré $(1,1)$. Notons $\epsilon : X = \tilde{W}_C \to W$ le morphisme d'éclatement et $E \subset X$ le diviseur exceptionnel.

Lemme 5.3.18. *Un isomorphisme $\phi : X = \tilde{W}_C \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{W}_{C'}$, où $C \subset W$ et $C' \subset W$ sont deux courbes elliptiques comme ci-dessus, descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de W tel que $\overline{\phi}(C) = C'$, c'est à dire que les contractions $\epsilon : X \to W$ et $\epsilon' \circ \phi : X \to W$ sont équivalentes, $\epsilon : X \to W$ et $\epsilon' : X' \to W$ désignant les morphismes d'éclatement.*

Démonstration.
Dans ce cas, comme montre la table 2 de [46], la contraction $X \to W$ est unique. □

Proposition 5.3.19. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface K3 diviseur anticanonique de $X = \tilde{W}_C$, alors $S_0 = \epsilon(S)$ est une intersection complète de la forme $V(q_{22}, h_{11}) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ contenant C.*

(ii) Soit $S_0 = V(q_{22}, h_{11}) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ une intersection complète lisse contenant une courbe elliptique $C = V(l_{11}', l_{11}'', h_{11})$. Alors S_0 est une surface K3 dont le réseau de Picard contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H_1] \oplus \mathbb{Z}[H_2] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de rang trois, muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, où H_1, H_2 désignent les images réciproques des sections hyperplanes des deux facteurs de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Elle est polarisée par la classe ample $\mathcal{O}_{S_0}(H_1+H_2)$ de degré 12 et contient deux pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$, $|C'|_{S_0}$ de degré 6 par rapport à H_1+H_2. Une surface K3 S_0 générique dans K_{12}^R s'obtient par cette construction. Cela entraîne, entre autre, que la surface K3 générique obtenue par cette construction a pour réseau de Picard R.

(iii) Pour un choix générique de S_0 dans K_{12}^R, S_0 contient exactement deux pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$, $|C'|_{S_0}$ de degré 6.

Fixons une surface K3 $S_0 = V(q_{22}, h_{11}) = Q_{22} \cap W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ contenant une courbe elliptique qui est une intersection complète lisse $C = L'_{11} \cap L''_{11} \cap W$ de W avec deux diviseurs de type $(1,1)$, générique dans K_{12}^R de sorte qu'elle satisfait à la propriété du (iii). Alors :

(iv) l'espace de modules $F_{S_0}^R = B$ est un ouvert de $|C|_{S_0} \sqcup |C'|_{S_0} = \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$, et

(v) la jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la famille universelle $f : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction au-dessus de B de la fibration lagrangienne $h : M_{S_0}^H(0,[C],0) \sqcup M_{S_0}^H(0, H-[C],0) \to |C|_{S_0} \sqcup |C'|_{S_0}$.

Démonstration. Notons $\epsilon : X = \tilde{W}_C \to W$ le morphisme d'éclatement et $E \subset X$ le diviseur exceptionnel.
(i) : On a $K_W = -2H_1 - 2H_2$, $K_X = -2H_1 - 2H_2 + E$. Considérons une surface irréductible $S \in |-K_X| = |2H_1 + 2H_2 - E|$. Alors, d'après la proposition 5.1.6 (ii), $S_0 = \epsilon(S) = V(q_{22}, h_{11})$, et S_0 contient C.
(ii) : Soit $S_0 = V(q_{22}, h_{11}) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ une surface $K3$ lisse contenant une intersection complète lisse $C = V(h_{11}, l'_{11}, l''_{11})$. C'est une surface $K3$ primitivement polarisée par la classe $H = H_1 + H_2 \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$ de degré 12. On a : $C = V(l'_{11}, l''_{11}, h_{11}) \subset S_0 = V(q_{22}, h_{11})$ si et seulement si $q_{22} = l_{11}h_{11} + l'_{11}h'_{11} + l''_{11}h''_{11}$. Alors $L'_{11} \cap S_0 = C \cup C'$. Ainsi $[C] + [C'] = H_1 + H_2 \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. Les intersections dans S_0 sont : $H_1^2 = (H_1 + H_2)\cdot(2H_1 + 2H_2)\cdot H_1^2 = 2$, $H_2^2 = (H_1 + H_2)\cdot(2H_1 + 2H_2)\cdot H_2^2 = 2$, $H_1 \cdot H_2 = (H_1 + H_2)\cdot(2H_1 + 2H_2)\cdot H_1 \cdot H_2 = 4$. Puis, $\deg C = (C\cdot H)_{S_0} = \#V(l'_{11}, l''_{11}, h_{11}, \tilde{h}_{11}, q_{22})$, où $\tilde{h}_{11}$ est une forme générique de bidegré $(1,1)$ représentant H. Puisque $C \subset S_0$, on a $q_{22} \in (l'_{11}, l''_{11}, h_{11})$, donc $\deg C = \#V(l'_{11}, l''_{11}, h_{11}, \tilde{h}_{11}) = (H_1 + H_2)^4_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2} = 6H_1^2H_2^2 = 6$. On a aussi $H_1 \cdot C = H_2 \cdot C = H_1 \cdot C' = H_2 \cdot C' = 3$, $C^2 = C'^2 = 0$, $C \cdot C' = (H_1 + H_2 - C)\cdot C = 6$. La surface $K3$ S_0 contient donc deux pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$ et $|C'|_{S_0}$ avec $C\cdot C' = 6$. Le réseau de Picard de S_0 contient ainsi le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H_1] \oplus \mathbb{Z}[H_2] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de rang trois avec la forme d'intersection indiquée dans l'énoncé.
(iii) Une surface $K3$ S_0 générique de K_{12}^R est de nombre de Picard 2. Dans ce cas elle contient exactement deux pinceaux elliptiques de bidegré $(3,3)$, car le système

$$\begin{cases} (aH'_1 + bH'_2 + cC)^2 & = 0 \\ (aH'_1 + bH'_2 + cC)\cdot H'_1 & = 3 \\ (aH'_1 + bH'_2 + cC)\cdot H'_2 & = 3 \end{cases}$$

admet deux solutions dans $\mathbb{Z}^2$, qui sont $(0,0,1)$ et $(1,1,-1)$.
(iv)-(v) : Ces points se démontrent comme dans les propositions 5.3.2 à 5.3.12. □

Diviseur du type (1,1,2) dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$

C'est la **famille 3 de nombre de Picard 3**. On notera $(a,b,c) = ([a_0,a_1],[b_0,b_1],[c_0,c_1,c_2]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Les variétés de Fano en question se représentent sous la forme $X = V(g) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, où g est un polynôme trihomogène en a, b, c de tridegré $(1,1,2)$. On représentera les classes de diviseurs de tridegré (i,j,k) sous la forme $iH_1 + jH_2 + kH_3$. Donc $X \in |H_1 + H_2 + 2H_3|$ et $-K_X = H'_1 + H'_2 + H'_3$, où $H'_i = H_i|_X$. On notera par pr_i la projection sur le i-ième facteur et par pr_{ij} la projection sur le produit du i-ième et du j-ième facteurs.

Le tableau 3 de Mori-Mukai [46] montre qu'il y a deux contractions non équivalentes $\epsilon_i : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ qui contractent un diviseur exceptionnel sur une courbe. Il est facile de les identifier comme les projections $\mathrm{pr}_{23}, \mathrm{pr}_{13}$. Montrons, par exemple, que pr_{23} est une contraction de ce type. Dans ce but, écrivons l'équation de X sous la forme suivante : $g = a_0h_0 + a_1h_1$, où les $h_i = h_i(b,c)$ sont des formes bihomogènes sur le produit du 2-ième et du 3-ième facteurs de bidegré $(1,2)$. On voit que $\mathrm{pr}_{23}|_X : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ est un isomorphisme au-dessus du complémentaire de la courbe $C_{23} = V_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(h_0, h_1)$, tandis que les fibres au-dessus des points de C_{23} sont $\mathbb{P}^1$. C'est la première contraction, $\epsilon_1 = \mathrm{pr}_{23}|_X$, de diviseur exceptionnel $E_1 = \epsilon_1^{-1}(C_{23})$. De façon similaire on définit la seconde contraction $\epsilon_2 = \mathrm{pr}_{13}|_X$ au diviseur exceptionnel $E_2 = \epsilon_2^{-1}(C_{13})$. Puisque les jacobiennes de ces courbes sont isomorphes, comme des V.A.P.P, à la jacobienne intermédiaire $J(X)$, et par le théorème de Torelli, on conclut que $C_{13} \simeq C_{12}$. En fait, on peut voir cet isomorphisme plus directement de façon géométrique.

Lemme 5.3.20. *La projection $\mathrm{pr}_3|_X : X \to \mathbb{P}^2$ est un fibré en coniques avec une courbe discriminante C_3 de degré 4 et de genre 3. Le revêtement double associé de C_3 paramétrant les composantes $\mathbb{P}^1$ des coniques*

$(\mathrm{pr}_3\,|_X)^{-1}(c) = \mathbb{P}^{1\,(1)}_c \bigvee \mathbb{P}^{1\,(2)}_c$ *réductibles est trivial, c'est à dire,* $(\mathrm{pr}_3\,|_X)^{-1}(C_3)$ *est la réunion de deux surfaces réglées* $E_i = \bigcup_{c\in C_3} \mathbb{P}^{1\,(i)}_c$, $i = 1,2$, *qui ne sont autres que les diviseurs exceptionnels des contractions* ϵ_i *comme le suggèrent les notations.*

La courbe d'intersection des diviseurs exceptionnels, ou en d'autres mots la courbe formée des points singuliers des coniques réductibles, $C = E_1 \cap E_2$, *est isomorphe aux trois courbes* C_{23}, C_{13}, C_3, *les isomorphismes étant établis par les projections* $\mathrm{pr}_{23}, \mathrm{pr}_{13}, \mathrm{pr}_3$ *respectivement.*

Démonstration. On écrit $g = \sum_{i,j} h_{ij} a_i b_j$, où h_{ij} sont des formes quadratiques en $c = (c_0, c_1, c_2)$. Les fibres $(\mathrm{pr}_3\,|_X)^{-1}(c)$ sont des coniques, sections planes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ plongé à la Segre dans $\mathbb{P}^3$. La conique $(\mathrm{pr}_3\,|_X)^{-1}(c)$ d'équation $\sum_{i,j} h_{ij}(c) a_i b_j = 0$ est réductible si et seulement si $\begin{vmatrix} h_{00}(c) & h_{01}(c) \\ h_{10}(c) & h_{11}(c) \end{vmatrix} = 0$, ce qui est l'équation de la quartique C_3. Le revêtement double paramétrant les composantes des coniques réductibles est trivial, parce que les deux composantes appartiennent à deux réglages différents de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et ne sont donc pas permutées par la monodromie le long des lacets dans C_3. $\square$

Remarque 5.3.21. *On peut également représenter* X *comme un fibré en coniques au-dessus de* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *au revêtement double du discriminant non trivial, via la projection* pr_{12}, *ce qui donne une représentation de la jacobienne intermédiaire de* X *comme la variété de Prym d'un revêtement double non ramifié d'une courbe de type* $(3,3)$ *et de genre* 4 *sur* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Proposition 5.3.22. *(i) Soit* $S \in |-K_X|_X$ *une surface K3, membre du système anticanonique de* X. *Alors* S *est une intersection complète de la forme* $V(g, g_S)$, *où* g_S *est trihomogène de tridegré* $(1,1,1)$. *De plus, si on suppose* X *et* S *génériques, alors les projections* ϵ_i *induisent des isomorphismes de* S *sur* $S_i = \epsilon_i(S)$, $i = 1,2$, *et* $C_{23} \subset S_1$, $C_{13} \subset S_2$. *La surface K3* S_i *(*$i = 1,2$*) est donc un diviseur de bidegré* $(2,3)$ *dans* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, *qui est non générique, puisqu'un tel diviseur générique possède le groupe de Picard de rang* 2, *mais* $S_i \simeq S$ *possède le groupe de Picard de rang* ≥ 3.

(ii) Pour une surface K3 $S \subset X$ *comme dans (i), le réseau de Picard* $\mathrm{Pic}\,(S)$ *contient le sous-réseau primitif* $R = \mathbb{Z}[H_1'] \oplus \mathbb{Z}[H_2'] \oplus \mathbb{Z}[H_3']$ *de rang trois dont la forme d'intersection est donnée par la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, *où on note par des primes la restriction des classes de diviseurs à* S. *La surface* $K3$ S *est primitivement polarisée par la classe ample* H_3' *de degré* 2. *Une telle surface* $K3$ S *est générique dans* K_2^R.

(iii) Une surface K3 S *générique dans* K_2^R *ne possède que deux pinceaux elliptiques* $|H_i'|$ *de degré* 3 *et que deux systèmes linéaires* $\mathbb{P}^3$ *de courbes de genres* 3 *et de degré* 4, $|E_i'| = |-H_i' + H_{2-i}' + 2H_3'|$. *De plus,* $\epsilon_i(E_i') = C_{2-i,3} \subset S_i$, *pour* $i = 1,2$.

(iv) Si S *est générique dans* K_2^R, *alors l'espace de modules* F_S^R *est un ouvert* B *de* $\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, I_S \otimes O(H_1 + H_2 + 2H_3)) = \mathbb{P}^3$.

(v) Le point (iii) permet d'identifier le $\mathbb{P}^3$ *du point (iv), contenant* B, *avec chacun des deux systèmes linéaires* $|E_i'|$, $i = 1,2$. *La jacobienne intermédiaire relative* $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$ *de la famille universelle* $f : \mathcal{X}_B \to B$ *des variétés de Fano de réseau de Picard* R *contenant* S *en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction au-dessus de* B *de la fibration lagrangienne* $h : M^H_{S_0}(0, [E_i'], 0) \to |E_i'|_S \simeq \mathbb{P}^3$ *pour chacune des deux valeurs* $i = 1$ *ou* 2.

Démonstration.
(i) En écrivant $g = a_0 h_0 + a_1 h_1$, où les $h_i = h_i(b,c)$ sont de bidegré $1,2$ et $g_S = a_0 l_0 + a_1 l_1$, où $l_i = l_i(b,c)$ sont de bidegré $(1,1)$ en b, c, on voit que les seuls points où $\mathrm{pr}_{23}\,|_S$ pourrait ne pas être isomorphisme sur l'image sont les points où $l_0 = l_1 = h_0 = h_1$, ce qui est l'ensemble vide pour le choix générique des h_i, l_i. Cela démontre l'isomorphisme $S \simeq S_1$. Puis, $C_{23} = \mathrm{pr}_{23}(E_i)$, et S contient donc une section de la projection $E_i \to C_{23}$, isomorphe à C_{23}.

Remarquons que la projection $S_1 \to \mathbb{P}^2$ est génériquement finie de degré 2. La famille de tels surfaces K3 est irréductible et son membre générique possède le groupe de Picard de rang 1. Les surfaces de cette famille qui ont un pinceau elliptique, génériques avec cette propriété, ont le groupe de Picard de rang 2 et se plongent dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, ce qui démontre que les diviseurs génériques de type $(2,3)$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ ont le groupe de Picard de rang 2. Or $S \simeq S_1$ a au moins 3 diviseurs indépendants, qui sont les restrictions des H_i.

Les rôles des deux premiers facteurs de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ étant symétriques, les mêmes conclusions sont vraies pour S_2, C_{13} à la place de S_1, C_{23}.
(ii) : La démonstration de ce point est tout à fait standard. Pour montrer l'amplitude de H_3', il suffit de vérifier que la projection $\mathrm{pr}_3|_S : S \to \mathbb{P}^2$ est finie (donc un revêtement double ramifié en une sextique).

Pour le montrer, on remarque que $\mathrm{pr}_3|_S$ pourrait ne pas être fini dans un des deux cas : 1) toute une conique $(\mathrm{pr}_3|_X)^{-1}(c)$ d'équation $\sum_{i,j} h_{ij}(c)a_ib_j = 0$ satisfait à l'équation $g_S = 0$, ou 2) $c \in C_3$ et g_S s'annule sur une des deux composantes de la conique $(\mathrm{pr}_3|_X)^{-1}(c) = \mathbb{P}^{1\,(1)}_c \bigvee \mathbb{P}^{1\,(2)}_c$. Le premier cas se réalise sur le lieu où

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{10} & h_{11} \\ l_{00} & l_{01} & l_{10} & l_{11} \end{pmatrix} < 2,$$

ce qui est une condition de codimension 3, qui définit donc génériquement l'ensemble vide de points $c \in \mathbb{P}^2$. Le deuxième cas est donné par les annulations des déterminants de (h_{ij}), de (l_{ij}) et d'au moins un déterminant mixte, formé d'une ligne ou d'une colonne de (h_{ij}), et d'une ligne ou d'une colonne de (l_{ij}), exprimant le fait que deux coniques réductibles $\sum_{i,j} h_{ij}(c)a_ib_j = 0$, $\sum_{i,j} l_{ij}(c)a_ib_j = 0$ ont une composante $\mathbb{P}^1$ commune. C'est donc une condition de codimension 3, qui ne se réalise pas pour des formes génériques (h_{ij}), (l_{ij}) sur $\mathbb{P}^2$.
(iii) : On trouve facilement toutes les solutions du système diophantien pour les indices d'intersections des classes de courbes elliptiques ou de genre 3 satisfaisant aux hypothèses.
(iv)-(v) : On remarque que d'après [59], la surface S générique de K_2^R ne peut avoir plus que deux automorphismes fixant R. La classe $H_3' \in R$ définit un revêtement double de $\mathbb{P}^2$, ce qui présente un exemple d'un automorphisme de S non trivial fixant H_3', qui est ι, l'involution de Galois du revêtement double. C'est le seul automorphisme de S induisant l'identité sur $\mathbb{P}^2$. Or ι ne fixe pas R, car $\iota^*(E_1') = E_2'$. Effectivement, la fibre de la projection vers $\mathbb{P}^2$ au-dessus d'un point c s'obtient comme l'intersection de deux diviseurs du type $(1,1)$, $g_c = 0$ et $g_{S,c} = 0$, dans la quadrique $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Lorsqu'un des points de la fibre se trouve sur E_1', l'équation $g_c = 0$ définit une conique réductible $\mathbb{P}^{1\,(1)}_c \bigvee \mathbb{P}^{1\,(2)}_c$ de sorte que $\mathbb{P}^{1\,(1)}_c \cap S \in E_1'$ et $\mathbb{P}^{1\,(2)}_c \cap S \in E_2'$. Donc l'involution permutant deux points de chaque fibre permute E_1' et E_2'.

Donc si S a un automorphisme non trivial fixant R, disons ϕ, alors ϕ induit une involution non triviale linéaire $\overline{\phi}$ de $\mathbb{P}^2$ laissant invariante la sextique de ramification. On a une seule forme normale pour une involution linéaire de $\mathbb{P}^2$: quitte à changer les coordonnées, on peut supposer que $\overline{\phi} : (c_0, c_1, c_2) \mapsto (c_0, -c_1, -c_2)$. La partie de dimension 1 du lieu fixe S^ϕ de ϕ, si non vide, est alors contenue dans $(\mathrm{pr}_3|_S)^{-1}(\ell)$, où ℓ est la droite d'équation $c_0 = 0$.

Remarquons maintenant, que le lieu fixe d'une involution sur une variété lisse est une réunion de composantes connexes lisses. S'il y a une composante de S^ϕ de dimension 0, c'est à dire un point isolé, alors l'involution est symplectique, le quotient S/ϕ est une surface K3 à points ordinaire doubles, images des points fixes de ϕ, et le compte des nombres d'Euler donne $\#(S^\phi) = 8$. On peut en déduire que $\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}\,(S) \geq 9$ (voir [75] pour les détails). Ce n'est pas notre cas, puisqu'on suppose S générique dans K^R et $\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}\,(S) = 3$.

Donc l'involution est antisymplectique. Si $S^\phi = \varnothing$, alors S/ϕ est une surface d'Enriques et $\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}\,(S) \geq 10$, ce qui est impossible, donc dans notre cas S^ϕ est une réunion de courbes lisses, et donc une seule courbe lisse de genre 2, puisque elle est contenue dans $(\mathrm{pr}_3|_S)^{-1}(\ell)$. Dans [60], Nikulin a classifié les lieux fixes des involutions antisymplectiques des surfaces $K3$, et selon cette classification, dans le cas où $\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}\,(S) = 3$, le lieu fixe d'une involution symplectique a une composante connexe de genre ≥ 8, ce qui est absurde. On conlclut donc que le groupe $\mathrm{Aut}^R(S)$ des automorphismes de S fixant R est trivial pour S générique dans K^R.

Dans le reste, les points (iv)-(v) se démontrent de façon similaire au points (iv)-(v) des propositions 5.3.2 à 5.3.12.

□

Diviseur du type (1,1,1,1) dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

C'est la **famille 1 de nombre de Picard 4**. On notera $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = (\mathbb{P}^1)^4$, où $a^{(i)} = (a_0^{(i)}, a_1^{(i)})$. Les variétés de Fano en question se représentent sous la forme $X = V(g) \subset (\mathbb{P}^1)^4$, où g est multilinéaire, de multidegré $(1,1,1,1)$. On représentera les classes de diviseurs de multidegré (i,j,k,l) sous la forme $iH_1 + jH_2 + kH_3 + lH_4$. Donc $X \in |\sum_i H_i|$ et $-K_X = \sum_i H_i'$, où $H_i' = H_i|_X$. On notera par pr_i, pr_{ij}, pr_{ijk} les projections sur les (produits de) facteurs.

Le tableau 4 de Mori-Mukai [46] montre qu'il y a quatre contractions non équivalentes $\epsilon_i : X \to (\mathbb{P}^1)^3$ qui contractent un diviseur exceptionnel sur une courbe. Il est facile de les identifier comme les projections pr_{ijk}. Montrons, par exemple, que pr_{234} est une contraction de ce type. Dans ce but, écrivons l'équation de X sous la forme suivante : $g = a_0^{(1)} h_0 + a_1^{(1)} h_1$, où les $h_i = h_i(a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$ sont des formes trihomogènes de tridegré $(1,1,1)$. On voit que $\mathrm{pr}_{234}|_X : X \to (\mathbb{P}^1)^3$ est un isomorphisme au-dessus du complémentaire de la courbe $C_{234} = V_{(\mathbb{P}^1)^3}(h_0, h_1)$, tandis que les fibres au-dessus des points de C_{234} sont $\mathbb{P}^1$. C'est la première contraction, $\epsilon_1 = \mathrm{pr}_{234}|_X$, de diviseur exceptionnel $E_1 = \epsilon_1^{-1}(C_{234})$. De façon similaire on définit les contractions $\epsilon_i = \mathrm{pr}_{jkl}|_X$ aux diviseurs exceptionnels $E_i = \epsilon_i^{-1}(C_{jkl})$, où $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, $j < k < l$. Puisque les jacobiennes de ces courbes sont isomorphes, comme des V.A.P.P, à la jacobienne intermédiaire $J(X)$, et par le théorème de Torelli, on conclut que toutes les courbes C_{jkl} sont isomorphes. On peut également vérifier cet isomorphisme de façon plus directe. Le lemme et la proposition suivantes se démontrent comme le lemme et la proposition précédentes, concernant la famille 3 au nombre de Picard 3.

Lemme 5.3.23. *La projection $\mathrm{pr}_{ij}|_X : X \to (\mathbb{P}^1)^2$ est un fibré en coniques avec une courbe discriminante C_{ij} de bidegré $(2,2)$ et de genre 1. Le revêtement double associé de C_{ij} paramétrant les composantes $\mathbb{P}^1$ des coniques $(\mathrm{pr}_{ij}|_X)^{-1}(c) = \mathbb{P}_c^{1(k)} \bigvee \mathbb{P}_c^{1(l)}$ réductibles est trivial, c'est à dire, $(\mathrm{pr}_{ij}|_X)^{-1}(C_{ij})$ est la réunion de deux surfaces réglées $E_\alpha = \bigcup_{c \in C_{ij}} \mathbb{P}_c^{1(\alpha)}$, $\alpha \in \{k,l\} = \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}$, qui ne sont autres que les diviseurs exceptionnels des contractions ϵ_α comme le suggèrent les notations.*

La courbe d'intersection des diviseurs exceptionnels E_k, E_l, ou en d'autres mots la courbe formée des points singuliers des coniques réductibles $(\mathrm{pr}_{ij}|_X)^{-1}(c)$, $c \in C_{ij}$, est isomorphe aux trois courbes C_{ijk}, C_{ijl}, C_{ij}, les isomorphismes étant établis par les projections respectives.

Proposition 5.3.24. *(i) Soit $S \in |-K_X|_X$ une surface $K3$, membre du système anticanonique de X. Alors S est une intersection complète de la forme $V(g, g_S)$, où g_S et g sont tous les deux multihomogènes de multidegré $(1,1,1,1)$. Les projections ϵ_i induisent des isomorphismes de S sur les surfaces K3 $S_i = \epsilon_i(S)$, $i = 1, \ldots, 4$, et $C_{jkl} \subset S_i$, où $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$.*

(ii) Soit $S = V(g, g_S) \subset (\mathbb{P}^1)^4$ une intersection complète lisse de deux diviseurs de type $(1,1,1,1)$. Le réseau de Picard de S contient le sous-réseau $R = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Z}[H_i']$ de rang quatre muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, où on note par des primes la restriction des classes de diviseurs à S. La surface $K3$ S est primitivement polarisée par la classe ample $\sum_{i=1}^4 H_i'$ de degré 24. Une telle surface $K3$ S est générique dans K_{24}^R.

(iii) Une surface K3 S générique dans K_{24}^R ne possède que quatre pinceaux elliptiques de degré 12, qui sont $|E_i'| = \left| \left(\sum_{\alpha=1}^4 H_\alpha' \right) - 2H_i' \right|$, $i = 1, \ldots, 4$.

(iv) L'espace de modules F_S^R est un ouvert B de $H^0\Big((\mathbb{P}^1)^4, I_S \otimes O\big(\sum_{i=1}^4 H_i'\big)\Big) = \mathbb{P}^1$.

(v) Le point (iii) permet d'identifier le $\mathbb{P}^1$ du point (iv), contenant B, avec chacun des 4 pinceaux $|E_i'|$, $i = 1, \ldots, 4$. La jacobienne intermédiaire relative $\mathcal{J}(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la famille universelle $f : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction au-dessus de B de la fibration lagrangienne $h : M_S^H(0, [E_i'], 0) \to |E_i'|_S \simeq \mathbb{P}^1$ pour chacune des 4 valeurs $i = 1, \ldots, 4$.

5.3.8 Les éclatés d'une intersection complète de deux quadriques de $\mathbb{P}^5$ en une courbe lisse connexe

Dans ce paragraphe, on considère les éclatés $X = \tilde{V}_C$ d'une intersection complète V de deux quadriques de $\mathbb{P}^5$ en une courbe lisse connexe C. On note $\epsilon : \tilde{V}_C \to V$ le morphisme d'éclatement.

Lemme 5.3.25. *Un isomorphisme $\phi : X = \tilde{V}_C \xrightarrow{\sim} X' = \tilde{V}_{C'}$, où $C \subset V$ et $C' \subset V$ sont des courbes connexes lisses, descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de V, tel que $\overline{\phi}(C) = C'$, c'est à dire que les contractions $\epsilon : X \to V$ et $\epsilon' \circ \phi : X \to V$ sont équivalentes, $\epsilon : X \to V$ et $\epsilon' : X' \to V$ désignant les morphismes d'éclatement.*

Démonstration.
Il y a trois cas dans cette catégorie, dans lesquels C est une droite, une conique ou une quartique elliptique. Comme montre la table de [46], dans les trois cas la contraction sur V est unique. $\square$

Dans ce qui suit $h : \overline{\mathcal{J}}_{2,S} \to \mathbb{P}^2$ désigne la compactification symplectique de la jacobienne intermédiaire des intersections complètes lisses de deux quadriques contenant S, voir Proposition 5.2.12.

Proposition 5.3.26. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface K3 diviseur anticanonique de $X = \tilde{V}_C$, alors $S_0 = \epsilon(S) = Q' \cap Q'' \cap Q \subset \mathbb{P}^5$, où Q, Q', Q'' sont des quadriques de $\mathbb{P}^5$, et S_0 contient C.*

(ii) Soit $S_0 = V(q', q'', q) \subset \mathbb{P}^5$ une intersection complète lisse de trois quadriques contenant C. C'est une surface K3 de K_8^R, où le réseau $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ a pour forme d'intersection $\begin{pmatrix} 8 & d(C) \\ d(C) & 2g(C)-2 \end{pmatrix}$. Une surface K3 S_0 générique de K_8^R s'obtient par cette construction. Cela entraîne, entre autre, que la surface K3 générique obtenue par cette construction a pour réseau de Picard R.

(iii) Pour un choix générique de $S_0 \in K_8^R$, S_0 contient, suivant les cas, exactement 2 pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$, $|C'|_{S_0}$ de degré 4 si $d(C) = 4$, resp. une unique conique C si $d(C) = 2$, resp. une unique droite $C = l$ si $d(C) = 1$.

Fixons une surface K3 générique $S = V(q_0', q_0'', q_0) \subset \mathbb{P}^5$ de K_8^R contenant C. On note S par S_0 au cas où $C = Q' \cap Q'' \cap \Lambda_3$ est une quartique elliptique, S_0' au cas où C est une conique, et S_0'' au cas où $C = l$ est une droite. Les assertions suivantes sont vérifiées :

(iv) L'espace de modules $B = F^R_{S_0}$, $F^R_{S_0'}$, resp. $F^R_{S_0''}$ est un ouvert de $\mathbb{P}^{2*} \times \big(|C|_{S_0} \sqcup |C'|_{S_0}\big) \simeq \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1)$, de $\mathbb{P}^{2*}$, resp. de $\mathbb{P}^{2*}$.

(v) Dans le cas de S_0, la jacobienne intermédiaire relative $J(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la famille universelle $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S_0 en tant que diviseur anticanonique s'identifie à la restriction du morphisme

$$h = h_2 \times h_c : \overline{\mathcal{J}}_{2,S_0} \times \Big(M^H_{S_0}(0,[C],0) \sqcup M^H_{S_0}(0, H-[C], 0)\Big) \to \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1)$$

au-dessus de B. Dans les cas de S_0' ou de S_0'', la jacobienne intermédiaire relative s'identifie à la restriction de $h_2 : \overline{\mathcal{J}}_{2,S_0} \to \mathbb{P}^2$ au-dessus de B.

Démonstration. Notons $E \subset X$ le diviseur exceptionnel.
(i) : On a $K_{\tilde{V}_C} = -2H + E \in \operatorname{Pic}(\tilde{V}_C)$. Soit $S \in |-K_X|$. Alors $S_0 = \epsilon(S) \in |2H|_V$ et contient C d'après la proposition 5.1.6 (ii). Puisque V est projectivement normale, $S_0 = Q \cap V$ pour une quadrique Q.
(ii) : La première assertion suit du fait que les propriétés :
— la classe $[H]$ est ample,
— la classe $[C]$ est représentée par une courbe connexe lisse,
sont ouvertes pour la topologie de Zariski dans toute déformation de S_0 préservant l'algébricité des classes $[H]$ et $[C]$. Cela entraîne qu'une surface $K3$ générique de K_8^R s'obtient par cette construction. Le théorème de Beauville ([6]) dit que le morphisme $s^R : \mathcal{F}^R \to K_8^R$ est génériquement surjectif, donc l'ensemble des surfaces $K3$ très générales de K_8^R, celles de nombre de Picard 2, a bien une intersection non vide avec l'image de ce morphisme.
(iii) : On considère séparément les trois cas.

Famille 10 de nombre de Picard 2

Soit $S_0 = Q \cap Q' \cap Q'' \subset \mathbb{P}^5$ une intersection complète lisse contenant $C = Q' \cap Q'' \cap \Lambda_3$. C'est une surface $K3$ de K_8, primitivement polarisée par la classe ample $H = O_{S_0}(1)$ de degré 8. On a $C \subset S_0$ si et seulement si $\Lambda_3 \cap Q' \cap Q'' \subset Q$. Les hyperplans H_t de $\mathbb{P}^5$ contenant Λ_3 sont paramétrés par $\mathbb{P}^1$, et pour $t \in \mathbb{P}^1$, on a $H_t \cap S_0 = C_t' \cup C$, où $\deg(C_t') = 4$; ainsi $[C_t'] + [C] = H$ dans $\operatorname{Pic}(S_0)$. Notons par C' un membre typique du pinceau C_t'. Nous avons les intersections suivantes dans S_0 : $H^2 = 8$, $H \cdot C = H \cdot C' = 4$, $C^2 = 0$, $C'^2 = 0$, $C \cdot C' = (H - C') \cdot C' = H \cdot C' = 4$. Le réseau de Picard de S_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ muni de la forme d'intersection comme dans l'énoncé, avec $g(C) = 1$, $d(C) = 4$, et S_0 contient deux pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$ et $|C'|_{S_0}$ de degré 4.

Pour un choix générique de $S_0 \in K_8^R$, $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est de rang 2. Dans ce cas S_0 contient exactement deux pinceaux elliptiques de degré 4, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = 0 \\ (aH + bC) \cdot H & = 4 \end{cases}$$

n'a que deux solutions dans $\mathbb{Z}^2$, qui sont $(0, 1)$ et $(1, -1)$.

Famille 16 de nombre de Picard 2

Soit $S'_0 = Q \cap Q' \cap Q'' \subset \mathbb{P}^5$ intersection complète lisse contenant une conique C. Les intersections dans S'_0 sont $H^2 = 8$, $H \cdot C = 1$, $C^2 = -2$. Le réseau de Picard de S'_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ muni de la forme d'intersection comme dans l'énoncé, avec $g(C) = 0$, $d(C) = 2$. Pour un choix générique de $S'_0 \in K_8^R$, $\mathrm{Pic}\,(S'_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est de rang 2. Dans ce cas, S'_0 contient une unique conique, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = -2 \\ (aH + bC) \cdot H & = 2 \end{cases}$$

n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0, 1)$.

Famille 19 de nombre de Picard 2

Soit $S''_0 = Q \cap Q' \cap Q'' \subset \mathbb{P}^5$ une intersection complète lisse contenant une droite $C = l$. Les intersections dans S''_0 sont $H^2 = 8$, $H \cdot l = 1$, $l^2 = -2$. Le réseau de Picard de S''_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[l]$ muni de la forme d'intersection comme dans l'énoncé, avec $g(C) = 0$, $d(C) = 1$.

Pour un choix générique de $S''_0 \in K_8^R$, $\mathrm{Pic}\,(S''_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est de rang 2. Dans ce cas S''_0 contient une unique droite, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = -2 \\ (aH + bC) \cdot H & = 1 \end{cases}$$

n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0, 1)$.

(iv) : Notons par B l'ouvert de $\mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1)$ ou de $\mathbb{P}^2$ paramétrant les éclates lisses $\tilde{V}_{C''}$. L'injectivité de l'application classifiante $r : B \to F_S^R$, pour $S = S_0, S'_0$ ou S''_0, se démontre en deux temps : on commence par l'injectivité sur le facteur $\mathbb{P}^2$ paramétrant les variétés V non-éclatées, puis on étudie l'effet de l'éclatement.

Puisque les variétés de Fano intersections lisses de deux quadriques de $\mathbb{P}^5$ sont des modèles sous-canoniques, leur champ de modules est un ouvert du quotient $[\mathrm{Gr}\,(2, \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^6)/\,\mathrm{PGL}\,(6)]$ de la grassmannienne des pinceaux de quadriques dans $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^6)$ par l'action du groupe $\mathrm{PGL}\,(6)$ des automorphismes de $\mathbb{P}^5$. Pour l'injectivité de la restriction de r sur le premier facteur il suffit donc de vérifier que pour S fixée, le stabilisateur de chaque extension de Fano V de S, qui est une intersection complète lisse de deux quadriques, est trivial. Ce stabilisateur s'identifie au groupe des automorphismes de V qui laissent S invariante et s'injecte dans le groupe $\mathrm{Aut}^H(S)$ des automorphismes de S fixant la classe de la section hyperplane H. On va montrer que $\mathrm{Aut}^H(S) = 1$ pour les trois familles de surfaces K3 en question.

D'après les résultats de [59], [80], pour une surface K3 générique au réseau de Picard R donné, le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}^R(S)$ fixant R est d'ordre 1 ou 2. Lorsque $S = S'_0$ ou S''_0, $\mathrm{Aut}^R(S) = \mathrm{Aut}^H(S)$ par l'unicité des (-2)-classes C, l complétant H à une base de R. Pour $S = S_0$, le seul automorphisme non trivial de R fixant H et préservant la proriété de H d'être ample est $H \mapsto H, C \mapsto H - C$, donc $|\mathrm{Aut}^H(S_0)| \in \{1, 2, 4\}$. Dans tous les cas, il suffit donc de démontrer que S ne possède aucune involution préservant H, c'est à dire, aucune involution induite par une involution linéaire de $\mathbb{P}^5$. Supposons le contraire, et notons par ι une telle involution.

D'après [75], le plus petit nombre de Picard $\rho(S)$ possible pour une surface K3 S admettant une involution symplectique est 9, donc ι est non symplectique. Son lieu fixe ne peut pas être vide, car dans le cas contraire le quotient S/ι serait une surface d'Enriques et on aurait $\rho(S) \geq 10$, ce qui serait absurde. Le lieu fixe de ι est donc une courbe lisse, connexe ou non, qui est une section linéaire de S ou une réunion de deux sections linéaires par les sous-espaces linéaires correspondant aux valeurs propres ± 1 de l'action de ι sur $\mathbb{P}^5$. Sur S_0, il n'y a que deux types de lieux fixes possibles selon cette descritpion : une courbe canonique lisse de degré 8, de classe H, et une quartique elliptique de classe C ou $H - C$. On fait maintenant référence à la classification par Nikulin des involutions anti-symplectiques sur les surfaces K3 [60] ; on peut trouver dans [42], Théorème 4.2, une représentation compacte, par un seul diagramme, des 75 classes de cette classification. On y voit trois classes au nombre de Picard $\rho = 2$, correspondant aux invariants de Nikulin $(\rho, a, \delta) = (2, 0, 0)$, $(2, 2, 0$, $(2, 2, 1)$. La structure du lieux fixe de l'involution est déterminée par l'invariant de Nikulin, et pour ces trois cas on a les lieux fixes suivants : a) une réunion disjointe d'une courbe de genre 10 et d'une courbe rationnelle, et b), c) une courbe de genre 9, de classe divisible ou non par 2. Une involution ι avec les propriétés précisées ci-dessus n'existe donc pas sur S_0. On traite les cas de S'_0, S''_0 de façon pareille. Remarquons que ces deux dernières surfaces ont chacune une infinité d'involutions anti-symplectiques dont aucune n'est H-linéaire, par exemple, l'involution de Galois du revêtement double défini par le système linéaire $|H - C|$ sur S'_0 ou $|2H - 3l|$ sur S''_0.

On passe à la deuxième étape de la démonstration : maintenant V est fixée et on laisse varier C''. Par le Lemme 5.3.25, la contraction $X = \tilde{V}_{C''} \to V$ est unique. Il reste donc à voir que, dans le cas de S_0, deux courbes distinctes de $|C| \sqcup |C'|$ ne peuvent pas être transformées l'une dans l'autre par un automorphisme de S_0 fixant R. Or on vient de voir que $\mathrm{Aut}^R(S_0) = 1$; l'injectivité de r est donc démontrée.

L'argument utilisant la trivialité du stabilisateur dans PGL (6) ci-dessus démontre aussi l'injectivité de r sur les vecteurs tangents du facteur $\mathbb{P}^2$; celle pour les vecteurs tangents au deuxième facteur, correspondant aux déformations infinitésimales de C'' dans V, se démontre par le même raisonnement que (iv) de la Proposition 5.3.2.
(v) : La démonstration est similaire à celle du (v) de la Proposition 5.3.2.

□

5.3.9 Les éclatés d'une cubique de $\mathbb{P}^4$ en une courbe lisse connexe

Les variétés de Fano sont les éclatés $X = \tilde{V}_C$ des cubiques lisses $V = V(f_3) \subset \mathbb{P}^4$ en une courbe lisse connexe C. On note $\epsilon : X = \tilde{V}_C \to V$ le morphisme d'éclatement et $E \subset X$ le diviseur exceptionnel.

Lemme 5.3.27. *Soient $X = \tilde{V}_C, X' = \tilde{V}_{C'}$ deux variétés de Fano de ce type et $\epsilon : X \to V$, $\epsilon' : X' \to V$ les contractions naturelles. Alors tout isomorphisme $\phi : X \xrightarrow{\sim} X'$ descend à un automorphisme $\overline{\phi}$ de V tel que $\overline{\phi}(C) = C'$, c'est à dire, les contractions ϵ, $\epsilon' \circ \phi$ sont équivalentes.*

Démonstration. Il y a deux cas dans cette catégorie, dans lesquels C est une droite ou une cubique plane. Comme montre la table de [46], dans ces cas la contraction sur V est unique. □

Proposition 5.3.28. *(i) Si $S \in |-K_X|_X$ une surface K3 diviseur anticanonique de $X = \tilde{V}_C$, alors $S_0 = \epsilon(S)$ est une section $V \cap Q$ de V par une quadrique contenant C.*

(ii) Soit $S_0 = V \cap Q \subset \mathbb{P}^4$ une intersection complète lisse d'une quadrique et d'une cubique contenant C et H la classe d'une section hyperplane. Alors S_0 est une surface K3 de K_6^R, où le réseau $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 6 & d_C \\ d_C & 2g(C) - 2 \end{pmatrix}$. Une surfaces K3 S_0 générique de K_6^R s'obtient par cette construction. Cela entraîne qu'une surface K3 très générale obtenue par cette construction a pour réseau de Picard R.

(iii) Si $S_0 \in K_6^R$ est générique, alors S_0 admet exactement deux pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$, $|C'|_{S_0}$ de degré $d_C = 3$ au cas où C est une cubique plane, et contient une unique droite dans le cas où $C = l$ est une droite.

Fixons une surface K3 $S_0 = V_0 \cap Q_0 \subset \mathbb{P}^4$, contenant une courbe elliptique $C = V_0 \cap \Lambda_2$ et générique dans K_6^R, et une surface K3 $S'_0 = V'_0 \cap Q'_0 \subset \mathbb{P}^4$, contenant une droite $C = l$ et générique dans $K_6^{R'}$, où R, resp. R' désigne le réseau indiqué dans la partie (ii) avec $d_C = 3, g(C) = 0$, resp. $d_C = 1, g(C) = 0$. Alors :

(iv) L'espace de modules $F_{S_0}^R$ est un ouvert de $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{I}_{S_0} \otimes O(3))) \times (|C|_{S_0}) \sqcup |C'|_{S_0}) = \mathbb{P}^5 \times (\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1)$, et $F_{S'_0}^R$ est un ouvert de $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{I}_{S_0} \otimes O(3))) = \mathbb{P}^5$.

(v) La question d'existence d'une compactification symplectique de la jacobienne intermédiaire relative de $F_{S_0}^R$ se réduit à celle du cas $r = 2$ et $b_2 = 1$, $-K_X^3 = 24$, voir Proposition 5.2.11. Notamment, $h_3 : \overline{\mathcal{J}}_{3,S_0} \to \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{I}_{S_0} \otimes O(3))) = \mathbb{P}^5$ est une compactification symplectique de la jacobienne intermédiaire relative des cubiques lisses de $\mathbb{P}^4$ contenant S_0 en tant que diviseur anticanonique, alors

$$h = h_3 \times h_C : \overline{\mathcal{J}}_{3,S_0} \times (M_{S_0}^H(0, [C], 0) \sqcup M_{S_0}^H(0, 2H - [C], 0)) \to \mathbb{P}^5 \times (\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1)$$

est une compactification symplectique de la jacobienne intermédiaire relative $J(\mathcal{X}_B/B) \to B$ de la famille universelle des variétés de Fano de réseau de Picard R contenant S en tant que diviseur anticanonique. Dans le cas de $F^R_{S'_0}$, la jacobienne intermédiaire relative $J(\mathcal{X}_{B'}/B') = \mathcal{J}_{3,S_0} \to B'$ est celle du cas $r = 2$, $b_2 = 1$, $-K_X^3 = 24$.

Remarquons, que dans les deux cas de $F^R_{S_0}$ et de $F^R_{S'_0}$, la question de l'existence d'une compactification h_3 se pose pour une sextique K3 non générique.

Démonstration.
(i)-(ii) : Ces points se démontrent comme dans les propositions 5.3.2-5.3.26
(iii) : On considère séparément les deux familles en question.
Famille 5 de nombre de Picard 2
Soit $S_0 = V \cap Q \subset \mathbb{P}^4$ une intersection complète lisse d'une quadrique et d'une cubique contenant une cubique plane $C = V \cap \Lambda_2$ lisse. C'est une surface $K3$ appartenant à K_6 primitivement polarisée par $H = O_{S_0}(1)$. On a $C = V \cap \Lambda_2 \subset S_0 = V \cap Q$ si et seulement si $\Lambda_2 \subset Q$. La quadrique $Q \subset \mathbb{P}^4$ est donc de rang 4, c'est à dire, un cône au-dessus d'une quadrique lisse de dimension 2. Donc Q contient deux familles de plans. Pour $t \in \mathbb{P}^1$ paramétrant les hyperplans $H_t \subset \mathbb{P}^4$ contenant Λ_2, on a $H_t \cap S_0 = C \cup C'_t$. Ainsi $\deg(C'_t) = 3$ et $H = [C] + [C'_t] \in \mathrm{Pic}\,(S_0)$. La surface $K3$ S_0 contient donc deux pinceaux elliptiques $|C|_{S_0}$ et $|C'_t|_{S_0}$ de degré 3 et les intersection dans S_0 sont : $H^2 = 6, \quad H \cdot C = H \cdot C' = 3, \quad C^2 = 0, \quad C'^2 = 0, \quad C \cdot C' = 3$. Le réseau de Picard de S_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ de forme d'intersection $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $S_0 \in {K_6}^R$ générique, $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[C]$ est de rang 2. Alors, S_0 contient exactement deux pinceaux elliptiques de degré 3, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = 0 \\ (aH + bC) \cdot H & = 3 \end{cases}$$

n'a que deux solutions dans $\mathbb{Z}^2$, qui sont $(0, 1)$ et $(1, -1)$.
Famille 11 de nombre de Picard 2
Soit $S'_0 = V \cap Q \subset \mathbb{P}^4$ une intersection complète lisse d'une quadrique et d'une cubique contenant une droite $C = l$. Les intersections dans S_0 sont $H^2 = 6, \ H \cdot l = 1 \ , \ l^2 = -2$. Le réseau de Picard de S_0 contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[l]$ de forme d'intersection $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Pour un choix générique de $S'_0 \in K_6^{R'}$, $\mathrm{Pic}\,(S'_0) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[l]$ est de rang 2. Alors, S'_0 contient une unique droite, car le système

$$\begin{cases} (aH + bC)^2 & = -2 \\ (aH + bC) \cdot H & = 1 \end{cases}$$

n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{Z}^2$, qui est $(0, 1)$.
(iv)-(v) : Les démonstrations sont similaires à celles des points (iv)-(v) de la proposition 5.3.26. □

5.3.10 Les revêtements doubles et fibrés en coniques

Famille 8 de nombre de Picard 2
On note par $\epsilon_1 : \tilde{\mathbb{P}}^3_x \to \mathbb{P}^3$ l'éclatement d'un point x dans $\mathbb{P}^3$, par E_1 le diviseur exceptionnel de $\tilde{\mathbb{P}}^3_x$, et par H la classe d'hyperplan de $\mathbb{P}^3$, ainsi que ses pullbacks via des morphismes qu'on considère. Les variétés de Fano de la famille en question sont les revêtements doubles $\pi : X \to \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ de $\tilde{\mathbb{P}}^3_x$ ramifiés en une surface $R_1 \in |-K_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}| = |4H - 2E_1|_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}$. On introduit les notations suivantes :

— $R_0 = \epsilon_1(R_1)$;
— r, l'équation de R_0, de sorte que $R_0 = V(r) \subset \mathbb{P}^3$ et $R_1 = V(r) \subset \tilde{\mathbb{P}}^3_x$ (on notera par le même symbole r et $r \circ \epsilon_1$) ;
— $E = \pi^{-1}(E_1)$;
— $\mathcal{R}$ le diviseur de ramification $\pi^{-1}(R_1) \simeq R_1$ de π ;
— $\mathcal{E} = O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x} \oplus O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(E_1 - 2H)$, un fibré vectoriel de rang 2 sur $\tilde{\mathbb{P}}^3_x$;
— $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \tilde{\mathbb{P}}^3_x$, le projectivisé de $\mathcal{E}$;

— $O(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(1)$, le faisceau tautologique de Grothendieck, l, sa classe dans le groupe de Picard ;
— $(\xi_j)_{j=0,1}$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ au-dessus de $\tilde{\mathbb{P}}^3_x$, vues comme des sections de $O(1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(j(2H-E_1))$ et choisies de telle façon, que les identifications canoniques

$$p_*\Big(O(1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}\big(j(2H-E_1)\big)\Big) = \mathcal{E}\otimes O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}\big(j(2H-E_1)\big) = O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}\big(j(2H-E_1)\big)\oplus O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}\big((j-1)(2H-E_1)\big)$$

transforment ξ_j en la section 1 du facteur $O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}$ de la somme directe.

Pour $R_1 = V(r)\subset\tilde{\mathbb{P}}^3_x$ donné, il n'y a qu'un seul, à isomorphisme près, revêtement double $\pi : X\to\tilde{\mathbb{P}}^3_x$ ramifié en R_1. Il peut être donné par l'équation $\xi_1^2-\xi_0^2r=0$,

$$\pi : X = V_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\xi_1^2-\xi_0^2r)\to\tilde{\mathbb{P}}^3_x,\quad \pi = p|_X : (\tilde{x},(\xi_0,\xi_1))\mapsto\tilde{x}.$$

Un revêtement double donné par une équation plus générale du type

$$X = V(\xi_1^2+\xi_0\xi_1q_2+\xi_0^2q_4)\subset\mathbb{P}(\mathcal{E})\to\tilde{\mathbb{P}}^3_x, \tag{5.3.3}$$

où $q_{2k}\in H^0(\tilde{\mathbb{P}}^3_x, O(k(2H-E_1)))$ $(k=1,2)$, est isomorphe au revêtement normalisé comme ci-dessus avec $r = q_2^2-4q_4$.

Lemme 5.3.29. *Soit $i_X : X\hookrightarrow\mathbb{P}(\mathcal{E})$ le plongement fermé. Alors*
(i) Le morphisme $i_{X*} : \mathrm{Pic}\,(X)\to\mathrm{CH}_2(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ est injectif.
(ii) Le fibré anticanonique de X est $-K_X = \pi^*(2H-E_1)$ et $\dim(|-K_X|) = 9 = \dim(|2H-E_1|_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x})+1$.
(iii) On a $i_X^*(l)=0$, donc $-K_X = i_X^*(2H-E_1) = i_X^*(l+2H-E_1)$ et $i_X^* : H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(2H-E_1))\xrightarrow{\sim} H^0(X,-K_X)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension 10.

Démonstration.
(i) : Il suffit de voir que les images des générateurs H' et E du groupe de Picard de X sont linéairement indépendants dans $\mathrm{CH}_2(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$.
(ii) : On a $[R_1] = 4H-2[E_1]\in\mathrm{Pic}\,(\tilde{\mathbb{P}}^3_x)$. On remarque que $R_0=\epsilon(R_1)\subset\mathbb{P}^3$ est une quartique contenant x et ayant une singularité quadratique en x, et que $R_1\subset\tilde{\mathbb{P}}^3_x$ est le transformé strict de R_0. De plus, $[\mathcal{R}] = \frac{1}{2}\pi^*[R_1] = 2H'-[E]\in\mathrm{Pic}\,(X)$ et $K_X = -4H'+2E+R = -2H'+E$, où $H'=\pi^*H$. La dimension de $|-K_X|$ s'obtient par la recherche d'une base explicite de $H^0(X,-K_X)$, pour laquelle on peut choisir $\xi_1,\xi_0M_0,\ldots,\xi_0M_8$, où les M_i forment une base des formes quadratiques de $\mathbb{P}^3$ s'annulant en x. Le résultat s'accorde avec ce qui suit du Théorème de Riemann–Roch : $h^0(X,-K_X)=\chi(X,-K_X) = 1/2(-K_X)^3+3 = 10$.
(iii) : On a $i_X^*(O(1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(2H-E_1)) = i_X^*(l+p^*2H-p^*E_1) = i_X^*l+2H'-E$. Mais $i_{X*}i_X^*l = l\cdot(2l+p^*4H-p^*2E_1) = 2(l^2+p^*(2H-E_1)) = 0$. Donc $i_X^*l=0$ d'après le point (i). Ceci montre que $i_X^*(O(1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(2H-E_1)) = 2H'-E = -K_X$. La deuxième assertion suit du fait que $H^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(-1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(-2H+E_1))=0$. En effet, $R^1p_*(O(-1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(-2H+E_1)) = R^1p_*O(-1)\otimes O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(-2H+E_1)=0$ car $R^1p_*O(-1)=0$ (les fibres de p sont des $\mathbb{P}^1$). Donc $H^0(\tilde{\mathbb{P}}^3_x, R^1p_*(O(-1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(-2H+E_1)))=0$. De même, $p_*(O(-1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(-2H+E_1)) = \mathcal{E}^*\otimes O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(-2H+E_1) = O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}\oplus O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(-2H+E_1)$. Donc $H^1(\tilde{\mathbb{P}}^3_x, p_*(O(-1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(-2H+E_1))) = H^1(\tilde{\mathbb{P}}^3_x, O\oplus O(-2H+E_1))=0$. On conclut par la suite spectrale de Leray que $H^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(-1)\otimes p^*O_{\tilde{\mathbb{P}}^3_x}(-2H+E_1))=0$.

□

Proposition 5.3.30. *(i) Une surface K3 $S\in|-K_X|$ se représente sous la forme $S = V(\xi_1^2-\xi_0^2r, c\xi_1+\xi_0q_2)\subset\mathbb{P}(\mathcal{E})$, où $c\in\mathbb{C}$ et q_2 est une forme quadratique sur $\mathbb{P}^3$ s'annulant en x.*
(ii) Pour une surface K3 comme dans (i), le réseau de Picard de S contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H']\oplus\mathbb{Z}[E']$ muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix}4&0\\0&-2\end{pmatrix}$, où $E'=E\cap S$ et $H'=\pi^{-1}(H)\cap S$. Une surface K3 générique de K^R s'obtient par cette procédure.
Fixons une surface K3 comme dans la partie (ii). Alors :

(iii) Le champ de modules $\mathcal{F}_S^R$, de dimension 9, s'identifie au champ quotient $[U/G]$, où $G = \mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a$ et U est un ouvert de l'espace affine $\mathbb{A}^{11}$, sur lequel il existe une famille localement semi-universelle $f : \mathcal{X} \to U$ des extensions de Fano de S. De plus, l'action de G sur U est libre, donc le schéma de modules grossier F_S^R existe, et l'application naturelle $U \to B = F_S^R$ est un fibré principal de groupe G.

(iv) La famille localement semi-universelle $f : \mathcal{X} \to U$ possède une structure de fibré en coniques $\mathcal{X} \to \mathcal{F}_S^R \times \mathbb{P}^2$ au-dessus de $\mathbb{P}^2$ dont les courbes discriminantes sont des sextiques planes génériquement lisses. La fibration lagrangienne des jacobiennes intermédiaires $\mathcal{J}(\mathcal{X}/\mathcal{F}_S^R) \to \mathcal{F}_S^R$ s'identifie donc à la variété de Prym relative $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\mathcal{C}}/\mathcal{C}) \to \mathcal{F}_S^R$ d'une famille de revêtements doubles $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{2:1} \mathcal{C} \to \mathcal{F}_S^R$ génériquement non ramifiés, où $\mathcal{C} \to \mathcal{F}_S^R$ est une famille de sextiques planes. La famille des revêtements doubles et celle des variétés de Prym descendent à des familles définies au-dessus de l'espace de modules grossier $B = F_S^R$.

Démonstration. (i) : Cela résulte des points (ii), (iii) du Lemme 5.3.29.
(ii) : Les intersections dans S sont $(H' \cdot H')_S = (\pi^*H \cdot \pi^*H \cdot S)_X = 2(H \cdot H \cdot (2H - E_1))_{\tilde{\mathbb{P}}^3} = 4$ et $(E' \cdot E')_S = (E \cdot E \cdot S)_X = 2(E_1 \cdot E_1 \cdot (2H - E_1))_{\tilde{\mathbb{P}}^3} = -2$. On obtient ainsi la matrice de l'énoncé de la proposition. La généricité d'une telle surface $K3$ S dans K^R résulte de (i) et du Théorème 4.3.7 (Beauville [6]).
(iii) : On peut paramétrer toutes les extensions de Fano X de S par l'espace affine $\mathbb{A}^{11}$ aux coordonnées $\lambda_0, \ldots, \lambda_8, \mu_0, \mu_1$, en donnant X par l'équation

$$(c\xi_1 + \xi_0 q_2)\left(\xi_0 \sum_{i=0}^{8} \lambda_i M_i + \mu_0 \xi_1\right) + \mu_1(\xi_1^2 - \xi_0^2 r) = 0, \tag{5.3.4}$$

où la notation M_i a le même sens que dans la démonstration du lemme 5.3.29, (ii). On note par U l'ouvert de $\mathbb{A}^{11}$ paramétrant les variétés (5.3.4) lisses. La base de cette famille $\mathbb{A}^{11}$ est munie de l'action naturelle de $G = \mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a$, qui s'obtient par l'application de certains automorphismes de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ à la famille (5.3.4), suivie du ré-développement du résultat sous la forme (5.3.4). Cette action par automorphismes est donnée par la formule :

$$(\lambda, \mu) : (\xi_0, \xi_1, (x_i)) \mapsto (\lambda\xi_0, \lambda\xi_1 + \mu(c\xi_1 + \xi_0 q_2), (x_i)). \tag{5.3.5}$$

où (x_i) sont les coordonnées de $\mathbb{P}^3$. Il est immédiat à voir que ce sont tous les automorphismes de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ qui fixent S point par point. En calculant l'action des transformations de G sur les λ_i, on voit que l'action de G est libre sur U. Donc l'application quotient $U \to U/G$ existe en tant qu'espace homogène principal de groupe G. Le quotient $B = U/G$ est de la dimension attendue $\frac{1}{2}b_3(X) = 9$, donc l'application classifiante $r_B : B \to F_S^R$ est génériquement finie. En supposant S générique dans K^R, on va montrer maintenant que r est un isomorphisme. Pour cela il suffit de démontrer que $\mathrm{Aut}^R(S) = 1$, c'est à dire, le seul automorphisme de S qui fixe R est l'identité, et que la famille (5.3.4) est localement semi-universelle.

Pour la première assertion, notons, qu'une surface K3 $S = V(\xi_1^2 - \xi_0^2 r, c\xi_1 + \xi_0 q_2)$ générique est isomorphe à la quartique de $\mathbb{P}^3$ d'équation $q_2^2 - c^2 r = 0$ avec la singularité en x éclatée. Par le calcul du nombre de paramètres dont dépendent ces surfaces K3, égal à 18, la surface K3 générique de K^R est une quartique de $\mathbb{P}^3$ à un point ordinaire double résolu. Il est facile de démontrer qu'une telle surface générique n'est invariante par aucune involution de $\mathbb{P}^3$ (par des arguments similaires à ceux utilisés dans les démonstrations du (iv) des propositions 5.3.8 et 5.3.26). D'après les résultats de Nikulin [59], pour $S \in K^R$ générique, $|\mathrm{Aut}^R(S)| \leq 2$, donc s'il n'y a pas d'involutions, $\mathrm{Aut}^R(S) = 1$.

On va vérifier enfin, toujours en supposant S générique, que la famille (5.3.4) est localement semi-universelle, c'est à dire, qu'elle induit, localement dans la topologie de Zariski, toutes les autres familles d'extensions de Fano de S. Pour cela on montre que pour une famille donnée $h : \mathcal{X} \to T$ d'extensions de Fano de S sur une base quelconque T, on peut définir, de façon relative au voisinage d'une fibre X_{t_0} quelconque, les coordonnées (x_i), (ξ_0, ξ_1), dans lesquelles la famille s'écrit par l'équation (5.3.4) avec les coefficients dépendant de $t \in T$. Puisque la restriction à S induit un isomorphisme $\mathrm{Pic}\, X_t \simeq R = \mathrm{Pic}\, S$ pour tous $t \in T$, on a les classes relatives $\mathbf{H}$ et $\mathbf{E}$ sur $\mathcal{X}$ qui induisent les classes H_t, E_t sur les fibres X_t, telles que E_t est un diviseur exceptionnel et les sections de H_t définissent un morphisme $\overline{\pi}_t : X_t \to \mathbb{P}^3$, génériquement $2:1$ et contractant E un en point $x_t \in \mathbb{P}^3$. L'application relative $\overline{\boldsymbol{\pi}} = \phi_{\mathbf{H}/T}$ définie par les sections de $\mathbf{H}$ agit comme $\overline{\pi}_t$ sur chaque fibre X_t, l'image de $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ étant le fibré projectif $\mathbb{P}(h_*(O_{\mathcal{X}}(\mathbf{H}))$. Quitte à remplacer T par un voisinage de t_0, on peut supposer le fibré projectif trivial, de sorte que $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ est un morphisme vers $\mathbb{P}^3 \times T$, et que les x_t forment la section constante, égale à $x = (1 : 0 : 0 : 0)$,

de la projection sur T. Puis, $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ se factorise par l'éclatement $\tilde{\mathbb{P}}^3_x \times T \to \mathbb{P}^3 \times T$, ce qui nous permet de récupérer la version relative du revêtement double $\boldsymbol{\pi} : \mathcal{X} \to \tilde{\mathbb{P}}^3_x \times T$. Puis on construit la version relative du fibré $\mathcal{E}$ de rang 2, en posant $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\pi}_*(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. Ensuite on définit les sections $\xi_j \in H^0(\tilde{\mathbb{P}}^3_x \times \{t_0\}, \mathcal{E}_{t_0}(j(2H - E_1))$ $(j = 0, 1)$, et on les étend au voisinage de t_0, ce qui est possible par le changement de base pour les faisceau $p_{T*}\boldsymbol{\mathcal{E}}$, où $p_T : \tilde{\mathbb{P}}^3_x \times T \to T$ est la seconde projection. Quitte à encore diminuer T, on peut supposer que (ξ_0, ξ_1) restent des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{P}(\mathcal{E}_t)$ pour tous $t \in T$. Alors $\mathbb{P}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E}_{t_0}) \times T$, le plongement relatif de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{P}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ au-dessus de $\tilde{\mathbb{P}}^3_x \times T$ a pour image un diviseur de $\mathbb{P}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$, le lieu des zéros d'une section donnée par une équation du type (5.3.3), dans laquelle les coefficients de q_2, q_4 dépendent de t. Si on impose la condition $S \subset X_t$, alors l'équation est forcément de la forme (5.3.4), ce qui démontre la semi-universalité locale. Il en résulte que $\mathcal{F}^R_S \simeq [U/G]$ et que le schéma quotient $B = U/G$ est l'espace de modules grossier du champ $\mathcal{F}^R_S$.
(iv) : Soit $x = (1 : 0 : 0 : 0)$ le point éclaté de $\mathbb{P}^3$. Alors la structure de fibré en coniques sur toute variété de Fano de la forme (5.3.3) est donnée par la projection $\rho : ((\xi_k), (x_l)) \mapsto x' = (x_1, x_2, x_3)$. En écrivant le discriminant $r = q_2^2 - 4q_4$ de (5.3.3) sous la forme $r = x_0^2 r_2 + x_0 r_3 + r_4$, où $r_k = r_k(x')$ est homogène de degré k, $k = 1, 2, 3$, on voit que toute fibre $\mathbb{P}^1$ de la projection linéaire $\tilde{\mathbb{P}}^3_x \to \mathbb{P}^2$ de centre x coupe le diviseur de branchement $r = 0$ en deux points, qui correspondent aux racines de r vu comme polynôme quadratique en x_0. La fibre de la projection $X \to \mathbb{P}^2$ au-dessus d'un point $x' \in \mathbb{P}^2$ est alors le revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié en ces deux points, donc la conique d'équation $t^2 - x_0^2 r_2(x') - x_0 r_3(x') - r_4(x') = 0$. Cette conique devient une paire de droites distinctes pour les x' satisfaisant à l'équation $\Delta = 0$, où $\Delta = r_3^2 - 4r_2r_4$ est une forme sextique. Pour X générique, les formes r_2, r_3, r_4 n'ont pas de zéros communs dans $\mathbb{P}^2$, donc le revêtement $\tilde{\Delta} \xrightarrow{2:1} \Delta$ est non ramifié. Ces revêtements, construits par ce procédé pour tous les membres X de la famille (5.3.4), donnent la famille des revêtements doubles $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{2:1} \mathcal{C} \to \mathcal{F}^R_S$ dont il s'agit dans l'énoncé de la proposition. Puisque l'action (5.3.5) se réduit à l'identité sur les courbes discriminantes $\Delta = 0$, la famille $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{2:1} \mathcal{C} \to \mathcal{F}^R_S$ descend à une famille $\tilde{\mathcal{C}}_B \xrightarrow{2:1} \mathcal{C}_B \to B$, et pareil pour les variétés de Prym relatives associées, bien qu'une famille universelle de variétés de Fano n'existe pas au-dessus de B. □

Famille 2 de nombre de Picard 3

Soient $\mathcal{E} = O \oplus O(-1,-1)^{\oplus 2}$ le fibré vectoriel de rang 3 sur la quadrique $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}/Q}(1)$ le fibré en droites tautologique, $l \in \mathrm{Pic}\,(\mathbb{P})$ la classe de diviseurs associé à L et $h_i = \pi^* h_i \in \mathrm{Pic}\,(\mathbb{P})$ les relèvements des classes de droites des deux réglages de Q. Les variétés de Fano qu'on considère dans cette section sont les diviseurs irréductibles lisses de $|L^{\otimes 2} \otimes \pi^* O(2,3)|$.

Proposition 5.3.31. *(i) Les variétés de Fano $X \in |L^{\otimes 2} \otimes \pi^* O(2,3)|$ sont des fibrés en coniques au-dessus de $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, pour la projection naturelle $X \hookrightarrow \mathbb{P} \xrightarrow{\pi} Q$.*

(ii) Si $S \in |-K_X|_X$ est une surface K3 contenue dans X en tant que diviseur anticanonique, alors $[S] = (l+2h_1+h_2)\cdot(2l+2h_1+3h_2) \in CH^2(\mathbb{P})$ et $\mathrm{Pic}\,(S)$ *contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[l] \oplus \mathbb{Z}[h_1] \oplus \mathbb{Z}[h_2]$ muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Une surface K3 générique dans K^R s'obtient par cette procédure.*

Fixons une surface K3 $S = X_0 \cap T_S \subset \mathbb{P}$ intersection complète lisse de deux diviseurs $X_0 \in |2l + 2h_1 + 3h_2|_{\mathbb{P}}$ et $T_S \in |l + 2h_1 + h_2|_{\mathbb{P}}$. Alors :

(iii) L'espace de modules du champ F^R_S est un ouvert B de $|X_0 - S|_{\mathbb{P}} \simeq \mathbb{P}^3$.

(iv) Si $B^o \subset B \subset \mathbb{P}^3$ est l'ouvert des $t \in B$ tels que la courbe discriminante $\Delta_t \subset Q$ du fibré en coniques $X_t \to Q$ soit lisse, alors $\tilde{\Delta}_t := F_1(X_t/Q)$ est lisse et la jacobienne intermédiaire relative de la restriction $f_{B^o} : \mathcal{X}_{B^o} \to B^o$ à B^o de la famille universelle $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ associée est isomorphe à la variété de Prym relative $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\Delta}_t/\Delta_t) \to B^o$.

Démonstration. (i) : La suite exacte d'Euler relative donne pour le fibré canonique relatif : $\omega_{\mathbb{P}/Q} \simeq \pi^*(\det \mathcal{E}^*) \otimes O_{\mathbb{P}/Q}(-3) = \pi^* O(-2,-2) \otimes O_{\mathbb{P}/Q}(-3) = O_{\mathbb{P}}(-2h_1 - 2h_2 - 3l)$. Ainsi, on a $K_{\mathbb{P}} = \pi^* K_Q \otimes \omega_{\mathbb{P}/Q} = -3l - 4h_1 - 4h_2 \in \mathrm{Pic}\,(\mathbb{P})$. Puisque la classe de X est $[X] = 2l + 2h_1 + 3h_2$, on a pour $y \in Q$: $X \cdot \pi^{-1}(y) = X \cdot h_1 \cdot h_2 = 2l \cdot h_1 \cdot h_2$ dans $\mathbb{P}$. Donc $X_y \subset \mathbb{P}_y \simeq \mathbb{P}^2$ est de degré 2, ce qui veut dire que $\pi : X \to \mathbb{Q}$ est un fibré en coniques.
(ii) : Soit $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ le plongement naturel. On a $K_X = K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}{}_{|X} + [X]_{|X} = -l - 2h_1 - h_2$, où $l = i^* l$, $h_i = i^* h_i$. Si $S \in |-K_X|$, $[S] = l + 2h_1 + h_2 \in \mathrm{Pic}\,(X)$, alors $[S] = (l + 2h_1 + h_2) \cdot [X] = (l + 2h_1 + h_2) \cdot (2l + 2h_1 + 3h_2) \in \mathrm{CH}^2(\mathbb{P})$.

On a $l^3 = l^2 \cdot \pi^*(c_1(\mathcal{E})) - l \cdot \pi^*(c_2(\mathcal{E})) = -(2h_1 + 2h_2) \cdot l^2 - 2h_1 \cdot h_2 \cdot l$. Les intersections dans S sont $(h_i \cdot h_j)_S = (h_i \cdot h_j \cdot (l+2h_1+h_2) \cdot (2l+2h_1+3h_2))_{\mathbb{P}} = 2\delta_{i+j,3}$, $(l \cdot h_1)_S = (l \cdot h_1 \cdot (l+2h_1+h_2) \cdot (2l+2h_1+3h_2))_{\mathbb{P}} = 1$,$(l \cdot h_2)_S = 2$, $(l^2)_S = -2$, ce qui donne la matrice d'intersections comme dans l'énoncé. La généricité d'une telle surface $K3$ S dans K^R suit du Théorème 4.3.7 (A. Beauville [6]).
(iii) : Fixons maintenant une surface lisse $S = X_0 \cap T_S \subset \mathbb{P}$ qui est une intersection de deux diviseurs irréductibles $X_0 \in |2l + 2h_1 + 3h_2|_{\mathbb{P}}$ et $T_S \in |l + 2h_1 + h_2|_{\mathbb{P}}$ de $\mathbb{P}$. On a $X_0 = V(s_0) \subset \mathbb{P}$ pour une section $s_0 \in H^0(\mathbb{P}, O(2l+2h_1+3h_2))$, et $T_S = V(s_T) \subset \mathbb{P}$ pour une section $s_T \in H^0(\mathbb{P}, O(l+2h_1+h_2))$. Alors une autre variété $X = V(s)$ de ce type contient S si et seulement si $s = \lambda_0 s + \sigma s_T$ pour un scalaire λ_0 et une section $\sigma \in H^0(\mathbb{P}, O(l + h_2))$. On notera par (x_0, x_1), (y_0, y_1) les coordonnées sur les deux facteurs de $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et par (ξ_0, ξ_1, ξ_2) les coordonnées homogènes dans les fibres de $\mathbb{P} \to Q$, qu'on choisit de telle façon que $\xi_0 \in H^0(\mathbb{P}, O(l))$, $\xi_1, \xi_2 \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(l + h_1 + h_2))$. Avec ces notations, σ est le produit de ξ_0 avec une forme quadratique en y_0, y_1, est s dépend de 4 paramètres $\lambda_0, \ldots, \lambda_3$:

$$X = V(s), \quad s = \lambda_0 s_0 + \xi_0(\lambda_1 y_0^2 + \lambda_2 y_0 y_1 + \lambda_3 y_1^2).$$

Toutes les extensions de Fano de S sont donc paramétrées par l'ouvert B de $\mathbb{P}^3$ formé des $\lambda = (\lambda_i)$, pour lesquels $V(s)$ est lisse et irréductible. La dimension de B étant égale à la dimension attendue $\frac{1}{2}b_3(X) = 3$, on voit que l'application classifiante $B \to F_S$ est génériquement finie, et par un raisonnement standard on vérifie qu'elle est en fait un isomorphisme.
(iv) : Cela suit de la théorie générale de la jacobienne intermédiaire des fibrés en coniques [4].

□

Dans la suite, on traite les **familles 2 et 18 de nombre de Picard 2**, ainsi que la **famille 1 de nombre de Picard 3**.

Les variétés de Fano de la **famille 2 de nombre de Picard 2** sont les revêtements doubles $\pi : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ ramifiés en un diviseur $R_0 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ de bidegré $(2, 4)$.

On introduit les notations suivantes :
- $W = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, les coordonnées homogènes et les points des deux facteurs du produit W étant notés $x = (x_0, x_1)$ et $y = (y_0, y_1, y_2)$;
- $\mathcal{E} = O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-2)$, le fibré vectoriel de rang 3 sur $\mathbb{P}^2$;
- $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^2$, le projectivisé de $\mathcal{E}$ avec sa projection sur $\mathbb{P}^2$ naturelle ;
- $O(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/\mathbb{P}^2}(1)$, le fibré en droites tautologique ;
- (x_0, x_1, x_2), les coordonnées homogènes sur les fibres de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, où $x_0, x_1 \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(1))$ correspondent aux sections 1 des deux facteurs $O_{\mathbb{P}^2}$ de la somme directe lors de l'identification canonique $p_*O(1) = \mathcal{E} = O_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-2)$, et $x_2 \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(1) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(2))$ correspond à la section 1 du troisième facteur, canoniquement isomorphe à $O_{\mathbb{P}^2}$, de la décomposition de $p_*(O(1) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(2)) = \mathcal{E}(2)$ en somme directe ;
- on identifiera W avec le diviseur $V_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(x_2)$ de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, ce qui permet d'identifier les coordonnées x_0, x_1 du premier facteur de W avec les restrictions $x_0|_W, x_1|_W$ de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$;
- $r_0 = r_0(x, y)$, l'équation d'un diviseur lisse R_0 de bidegré $(2, 4)$ dans W,

  $$r_0 = f_{00}(y)x_0^2 + f_{01}(y)x_0x_1 + f_{11}(y)x_1^2,$$

  où f_{00}, f_{01} et f_{11} sont des polynômes homogènes de degré 4 ;
- $\pi : X \to W$, le revêtement double ramifié en R_0, que l'on considère dans son plongement dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$:

  $$V(x_2^2 - r_0(x, y)) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}), \quad \pi : X \xrightarrow{2:1} W, \ \pi : (x_0, x_1, x_2, y) \mapsto (x_0, x_1, y);$$
- $\mathcal{R} = \pi^{-1}(R_0) \subset X$ le diviseur de ramification ;
- $H_1 = [O(1)]$, $H_2 = [p^*O_{\mathbb{P}^2}(1)]$, des classes dans $\mathrm{Pic}\,(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ ou leurs restrictions à W, et $H_i' = H_i|_X$ les restrictions à X.

Remarquons qu'on peut donner les revêtements doubles de ce type par des equations plus générales,

$$V_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(x_2^2 + x_2 q_2(x_0, x_1, y) + q_4(x_0, x_1, y)) \xrightarrow{2:1} W = V_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(x_2), \quad (x_0, x_1, x_2, y) \mapsto (x_0, x_1, y), \tag{5.3.6}$$

où $q_{2k} = q_{2k}(x_0, x_1, y) \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(k) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(2k))$, $k = 1, 2$. Une telle équation se transforme en une équation de la forme $x_2^2 - r_0$ avec $r_0 = q_2^2 - 4q_4$ par un changement de coordonnées.

Lemme 5.3.32. *Soit $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ le plongement naturel. Alors :*

(i) Le morphisme $i_{X*} : \mathrm{Pic}\,(X) \to \mathrm{CH}_2(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ est injectif.

(ii) On peut engendrer les espaces de sections de fibrés en droites suivants sur X par leurs bases monomiales explicites :

$$H^0(X, O(H_1')) = \langle x_0, x_1\rangle,\ H^0(X, O(H_2')) = \langle y_0, y_1, y_2\rangle,\ H^0(X, O(H_1' + H_2')) = \langle x_i y_j\rangle_{i=0,1,j=0,1,2}.$$

(iii) Le fibré anticanonique de X est $-K_X = H_1' + H_2' = \pi^*(H_1|_W + H_2|_W)$, et $\dim(|-K_X|) = \dim(|H_1 + H_2|) = \dim\left(\left|H_1|_W + H_2|_W\right|\right) = 5$.

Démonstration. (i) : Il suffit de voir que les images des générateurs H_1' et H_2' du groupe de Picard de X sont linéairement indépendants dans $\mathrm{CH}_2(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$.
(ii) : Dans le cas de H_1', les égalités $H_1' = i_X^*[O(1)] = \pi^*(O_W(1,0)) = \pi^*[H_1|_W]$ suivent du fait que $i_X^{-1}(V_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(x_0)) = \pi^{-1}(V_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(x_0))$. Le fait que la restriction $O_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(H_1) \to O_X(H_1')$ induit l'isomorphisme sur les sections globales suit de l'annulation $H^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(-1) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(-4)) = 0$, que l'on peut vérifier, à son tour, par la suite spectrale de Leray, dans laquelle $R^1p_*O(-1) = 0$. De façon similaire on démontre les assertions concernant deux autres fibrés en droites.
(iii) : Le calcul de $K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ se fait par la suite exacte d'Euler pour le fibré tangent du projectivisé d'un fibré vectoriel, comme dans la proposition 5.3.31. On trouve d'abord le faisceau dualisant relatif $\omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/\mathbb{P}^2} \simeq O(-3) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(-2)$, puis $K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \simeq O(-3) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(-5)$. Puisque X est le schéma des zéros de la section $x_2^2 - r_0$ de $O(2) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(4)$, la formule d'adjonction donne $K_X = i_X^*(O(1) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(1)) = O_X(H_1' + H_2')$. La partie (ii) donne une base de $H^0(X, O_X(H_1'+H_2'))$ de cardinalité 6, d'où le résultat, d'ailleurs, la dimension suit encore de la formule de Riemann–Roch : $h^0(X, -K_X) = \chi(X, -K_X) = 1/2(-K_X)^3 + 3 = 6$. □

Proposition 5.3.33. *(i) Les variétés de Fano $X = V(x_2^2 - r_0(x_0, x_1, y)) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ comme ci-dessus ont une structure d'un fibré en coniques, donnée par la projection $p|_X : X \to \mathbb{P}^2$. La courbe discriminante $\Delta = V(f_{01}^2 - 4f_{00}f_{11}) \subset \mathbb{P}^2$ de ce fibré en coniques est de degré 8 et de genre 21.*

(ii) Une surface K3 $S \in |-K_X|$ peut être représentée sous la forme $S = V(x_2^2 - r_0(x_0, x_1, y), h_0(y)x_0 + h_1(y)x_1) = X \cap V(h_0(y)x_0 + h_1(y)x_1) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$, où h_i sont des formes linéaires en y.

(iii) Soit S une surface K3 comme dans (ii). Alors $\mathrm{Pic}\,(S)$ contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H_1'] \oplus \mathbb{Z}[H_2']$ muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2\end{pmatrix}$, où H_i' dénote $H_i|_S$. La surface S est primitivement polarisée par la classe ample $H_1' + H_2'$ de degré 6. Une telle surface K3 S est générique dans K_6^R.

(iv) Pour une surface K3 S générique, comme dans (ii), le champ de modules $\mathcal{F}_S^R$, de dimension 20, s'identifie au champ quotient $[U/G]$, où $G = \mathbb{G}_a^3 \rtimes \mathbb{G}_m$ et U est un ouvert de l'espace affine $\mathbb{A}^{24}$, sur lequel il existe une famille localement quasi-universelle $f : \mathcal{X} \to U$ des extensions de Fano de S. De plus, l'action de G sur U est libre, donc le schéma de modules grossier F_S^R existe, et l'application naturelle $U \to B = F_S^R$ est un fibré principal de groupe G.

(v) Soit $U^o \subset U$ l'ouvert des $t \in U$ tels que la courbe discriminante $\Delta_t \subset \mathbb{P}^2$ de $X_t \to \mathbb{P}^2$ est lisse. Alors $\tilde{\Delta}_t := F_1(X_t/\mathbb{P}^2) \to \Delta_t$ est un revêtement double non ramifié, et la jacobienne intermédiaire relative de la restriction $f_{U^o} : \mathcal{X}_{U^o} \to U^o$ à U^o de la famille semi-universelle $f : \mathcal{X} \to U$ est isomorphe à la variété de Prym relative $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\boldsymbol{\Delta}}/\boldsymbol{\Delta}) \to U^o$, où $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \boldsymbol{\Delta}$ désignent les familles des courbes $\tilde{\Delta}_t, \Delta_t$ sur tous les $t \in U^o$.

Démonstration. (i) : Pour $y \in \mathbb{P}^2$ fixé, la fibre $(p|_X)^{-1}(y) = X_y$ est une conique du plan $\mathbb{P}^2$ aux coordonnées (x_0, x_1, x_2), définie par la forme quadratique

$$x_2^2 - r_0(x_0, x_1, y)) = x_2^2 - f_{00}(y)x_0^2 - f_{01}(y)x_0x_1 - f_{11}(y)x_1^2,$$

où f_{00}, f_{01} et f_{11} sont des formes de degré 4, ce qui entraîne l'assertion du point (i).
(ii) : Cela résulte de (ii), (iii) du lemme 5.3.32.
(iii) : Soit $S = V(x_2^2 - r_0(x_0, x_1, y), h_0(y)x_0 + h_1(y)x_1) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ lisse. Les intersections dans S sont $(H_1' \cdot H_2')_S = (H_1' \cdot H_2' \cdot H_1' + H_2')_X = 2(H_1 \cdot H_2 \cdot H_1 + H_2) = 2$, $({H'}_1^2)_S = (H_1' \cdot H_1' \cdot H_1' + H_2')_X = 2(H_1 \cdot H_1 \cdot H_1 + H_2)_W = 0$, $({H'_2}^2)_S = (H'_2 \cdot H'_2 \cdot H'_1 + H'_2)_X = 2(H_2 \cdot H_2 \cdot H_1 + H_2)_W = 2$. On obtient ainsi la matrice de l'énoncé de la proposition. La généricité d'une telle surface $K3$ S dans K_6^R suit de [6].

(iv) : Etant donnée une extension de Fano $X_0 = V(s_0)$ de $S = V(s_0, s_{K3})$, où $s_0 = x_2^2 - r_0 \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(2H_1 + 4H_2))$, $s_{K3} = h_0(y)x_0 + h_1(y)x_1 \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(H_1 + H_2))$, toutes les extensions de Fano de S s'écrivent sous la forme

$$X = V(s) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}),\ s = \lambda_0 s_0 + \sigma s_{K3},\ \text{où } \sigma \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(H_1 + 3H_2)). \tag{5.3.7}$$

Comme dans la preuve du lemme 5.3.32, (ii), on démontre que $H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(H_1 + 3H_2))$ a pour base les 23 monômes $x_i y_j y_k y_l, x_2 y_m$ $(0 \leq i \leq 1,\ 0 \leq j \leq k \leq l \leq 2,\ 0 \leq m \leq 2)$. Donc les variétés $V(s)$ de ce type sont paramétrées par l'espace affine $\mathbb{A}^{24}$; notons par U la partie ouverte paramétrant les variétés $V(s)$ lisses. Il est facile d'identifier un groupe G d'automorphismes de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ de dimension 4 qui permute les membres de cette famille, de sorte que $\dim [U/G] = \frac{1}{2} b_3(X) = 20$ et l'application classifiante $r_B : B := [U/G] \to \mathcal{F}_S^R$ est génériquement finie. Effectivement, on peut poser

$$G = \{g_{\mu,\ell} : (x, x_2, y) \mapsto (\mu x, \mu x_2 + x_0 s_{K3} \ell(y), y)\}_{\mu \in \mathbb{C}^*,\ \ell \in H^0(\mathbb{P}^2, O(1)) = \langle y_0, y_1, y_2 \rangle}. \tag{5.3.8}$$

La suite de la démonstration utilise des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du point (iv) de la proposition 5.3.30. Commençons par montrer que pour S générique, il n'y a pas d'automorphismes de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ autres que (5.3.8) qui préservent la famille (5.3.7). Notons d'abord qu'un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ fixe les classes H_1, H_2. Puis, s'il préserve la famille des variétés $V(s)$, il laisse invariante S. Donc il fixe $H_i' = H_i|_S$, c'est à dire, agit par l'identité sur le sous-réseau R de $\mathrm{Pic}\,(S)$.

Pour le choix générique de S, on a $\mathrm{Pic}\,(S) = R$, et le seul automorphisme non trivial de S qui fixe R est l'involution du revêtement double $S \to R_0 \simeq \mathbb{F}_1$. On peut le déduire, par exemple, du résultat général de Nikulin [59], affirmant, que pour tout réseau R et pour une surface $K3$ S générique de K^R, l'ordre du groupe $\mathrm{Aut}^R(S)$ ne peut être supérieur à 2. Donc si $\psi : X_t \xrightarrow{\sim} X_s$ est un isomorphisme de deux membres de la famille (5.3.7), quitte à le composer avec l'involution du revêtement double, on peut supposer qu'il fixe S point par point. Il préserve aussi la classe de diviseurs $-K_X = H_1' + H_2'$ et induit donc un automorphisme de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, donné par un élément $\overline{\psi}$ de $\mathrm{PGL}\,(2) \times \mathrm{PGL}\,(3)$. Cet élément fixe point par point R_0, puisque ψ fixe S et S est un revêtement double de R_0. Or les projections de R_0 sur les deux facteurs $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ sont surjectives, donc $\overline{\psi}$ est trivial. Donc ψ n'agit que sur la coordonnée x_2, et (5.3.8) donne la forme générale de ψ.

On a donc démontré que l'application classifiante r_B est injective, et il reste à vérifier qu'elle est lisse. Il suffit de montrer que la famille (5.3.7) est localement semi-universelle pour $\mathcal{F}_S^R$; le résultat suivra alors du fait que les stabilisateurs de tous les points de U sont les mêmes, égaux à G.

La semi-universalité locale de la famille (5.3.7) signifie que pour toute famille $\mathcal{X} \to T$ d'extensions de Fano de S, il existe un recouvrement de T par des ouverts de Zariski U_i, tel que les restrictions $\mathcal{X}_{U_i} \to U_i$ sont des pullbacks de la famille (5.3.8) via des morphismes convenables $\phi_i : U_i \to U$.

On suppose donc qu'on est donné une famille quelconque $f : \mathcal{X} \to T$ d'extensions de Fano de S, et on veut la représenter, au voisinage d'un point $t_0 \in T$ quelconque, comme le pullback de (5.3.7).

On a l'application anticanonique relative $\phi = \phi_{\omega^{-1}_{\mathcal{X}/T}} : \mathcal{X} \to \mathbb{P}(f_*(\omega^{-1}_{\mathcal{X}/T}))$, d'image $\mathcal{W} = \phi(\mathcal{X})$, qui induit sur chaque fibre le revêtement double

$$\phi_t : X_t \xrightarrow{2:1} W_t \hookrightarrow \mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(H^0(X_t, \omega^{-1}_{X_t})),$$

où $W_t \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ est plongé dans $\mathbb{P}^5$ par le plongement de Segre. En remplaçant T par un voisinage de t_0 convenable, on peut supposer que le fibré vectoriel $f_*(\omega^{-1}_{\mathcal{X}/B})$ est trivial, et donc ϕ est une application vers $\mathbb{P}^5 \times T$. En diminuant T encore, on trouve un hyperplan L_1 de $\mathbb{P}^5$, tel que $L_1 \cap W_t$ est un diviseur irréductible dans W_t de type $(1, 1)$. Un tel diviseur est isomorphe à $\mathbb{F}_1$ et contient donc l'unique courbe exceptionnelle $\mathbb{P}^1_t$. En prenant la réunion des $\mathbb{P}^1_t$ sur tous les $t \in T$, on obtient une sous-variété de $\mathcal{W}$ qu'on note $\mathbf{P}^1$.

En choisissant un hyperplan L_2 assez générique de $\mathbb{P}^5$ et diminuant encore T, on peut supposer que L_2 coupe chaque $\mathbb{P}^1_t$ en un point, ce qui distingue un plan $\mathbb{P}^2_t$ du réglage de W_t parmi les plans du type $x \times \mathbb{P}^2$, $x \in \mathbb{P}^1$. On note la réunion des plans $\mathbb{P}^2_t$ par $\mathbf{P}^2$; c'est un diviseur de $\mathcal{W}$, fibré au-dessus de T de fibre $\mathbb{P}^2$. La restriction de ce diviseur sur chaque fibre W_t est de type $(1, 0)$; on notera sa classe dans le groupe de Picard par $\mathbf{H}_1$. On pose $\mathbf{H}_2 = [L_1 \times T] - \mathbf{H}_1$, et alors on a la projection $\eta = \phi_{\mathbf{H}_2/T} : \mathcal{W} \to \mathbf{P}^2$, de sorte que $\eta \circ \phi : \mathcal{X} \to \mathbf{P}^2$ est une famille de fibrés en coniques sur $\mathbb{P}^2_t$, $t \in T$. Puisque la restriction de $O_{\mathbb{P}^5}(1) \boxtimes O_T$ sur les fibres $\mathbb{P}^2_t$ est $O_{\mathbb{P}^2}(1)$, la variété de Severi-Brauer $\mathbf{P}^2 \to T$ est scindée, et en diminuant T, on peut supposer que $\mathbf{P}^2 = \mathbb{P}^2 \times T$.

On a donc la famille de fibrés en coniques $\theta = \eta \circ \phi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^2 \times T$. Le plongement anticanonique relatif par les sections de $\omega^{-1}_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^2 \times T}$ plonge $\mathcal{X}$, au-dessus de $\mathbb{P}^2 \times T$, dans le projectivisé du fibré vectoriel $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \theta_*(\omega^{-1}_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^2 \times T})$. De plus, en prenant la restriction à $t_0 \in T$, on peut identifier $\mathcal{E}_{t_0} =: \boldsymbol{\mathcal{E}}|_{\mathbb{P}^2 \times \{t_0\}}$ avec $O^{\oplus 2}_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-2)$, ce qui définit un plongement de X_{t_0} dans $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{t_0})$, dont l'image est donnée par une équation de la forme (5.3.6). On a juste à montrer que la donnée de X_t par cette équation se relativise au-dessus de T.

Effectivement, les sections $x_0, x_1 \in H^0(\mathbb{P}^2 \times \{t_0\}, \mathcal{E}_{t_0})$ et $x_2 \in H^0(\mathbb{P}^2 \times \{t_0\}, \mathcal{E}_{t_0}(2))$ s'étendent à des sections de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, resp. $\boldsymbol{\mathcal{E}} \otimes (O_{\mathbb{P}^2}(2) \boxtimes O_T)$ dans un voisinage de $\mathbb{P}^2 \times \{t_0\}$, par le changement de base et l'annulation des groupes $H^1(\mathbb{P}^2 \times \{t_0\}, \mathcal{E}_{t_0})$, $H^1(\mathbb{P}^2 \times \{t_0\}, \mathcal{E}_{t_0}(2))$. Quitte à remplacer T par ce voisinage et à le diminuer, on peut supposer que les sections x_i ainsi définies sont des formes linéaires indépendantes sur les fibres de $\mathbb{P}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \to \mathbb{P}^2 \times T$. Cela permet d'identifier $\mathbb{P}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ avec $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{t_0}) \times T$ et de donner toute la famille $\mathcal{X}$ par une équation (5.3.6) dépendant de $t \in T$. Lorsqu'on impose la condition $S \subset X_t$ pour tous t, l'équation acquiert la forme (5.3.7), ce qui termine la démonstration de la semi-universalité de la famille (5.3.7).

On en conclut l'isomorphisme $[U/G] \simeq \mathcal{F}_S$.

(v) : En utilisant la représentation des fibres du fibré en coniques $X \to \mathbb{P}^2$, donnée dans (i), nous voyons que les fibres droites doubles correspondent aux annulations simultanées des 3 formes quartiques f_{00}, f_{01}, f_{11}. Génériquement ces trois formes n'ont pas de zéros communs, donc les revêtements doubles $\tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$ sont génériquement non ramifiés et le résultat suit de la théorie générale de la jacobienne intermédiaire des fibrés en coniques [4].

□

Remarque 5.3.34. *L'espace de modules $\mathcal{F}$ des variétés de Fano de ce type est usuellement construit comme le quotient d'un ouvert de l'espace projectif $|O_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(2,4)|$, paramétrant les diviseurs de ramification R_0, par* $\mathrm{PGL}\,(2) \times \mathrm{PGL}\,(3)$. *Or cette description ne convient pas à l'étude de $\mathcal{F}^R_S$, car la condition $S \subset X$ ne se traduit pas directement par des propriétés du diviseur de ramification de $X \to W$. Par le théorie de la descente (Théorèmes 4.33, 4.38 in [22]), les familles $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}$, $\boldsymbol{\Delta}$ descendent à des familles définies sur B. Cependant, pour donner les équations de ces familles, on a dû introduire des paramètres supplémentaires, qui sont les coefficients de σ, et l'équation de $\boldsymbol{\Delta}$ dépend de ces paramètres supplémentaires de façon non linéaire.*

Les variétés de Fano de la **famille 18 de nombre de Picard 2** sont les revêtements doubles de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ ramifiés en un diviseur de bidegré $(2,2)$.

On utilisera les notations suivantes :

— $W = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, comme dans le cas de la famille 2, aux coordonnées $x = (x_0, x_1)$ et $y = (y_0, y_1, y_2)$ sur les facteurs du produit direct ;

— $\mathcal{E} = O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-1)$, le fibré vectoriel de rang 3 sur $\mathbb{P}^2$;

— $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^2$, le projectivisé de $\mathcal{E}$ avec sa projection sur $\mathbb{P}^2$ naturelle ;

— $O(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/\mathbb{P}^2}(1)$, le fibré en droites tautologique ;

— (x_0, x_1, x_2), les coordonnées homogènes sur les fibres de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, où $x_0, x_1 \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(1))$ correspondent aux sections 1 des deux facteurs $O_{\mathbb{P}^2}$ de la somme directe lors de l'identification canonique $p_*O(1) = \mathcal{E} = O^{\oplus 2}_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-1)$, et $x_2 \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(1) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(1))$ correspond à la section 1 du troisième facteur, canoniquement isomorphe à $O_{\mathbb{P}^2}$, de la décomposition en somme directe de $p_*(O(1) \otimes p^*O_{\mathbb{P}^2}(1)) = \mathcal{E}(1)$;

— on identifiera W avec le diviseur $V_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(x_2)$ de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, ce qui permet d'identifier les coordonnées x_0, x_1 du premier facteur de W avec les restrictions $x_0|_W, x_1|_W$ de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$;

— $r_0 = r_0(x, y)$, l'équation d'un diviseur lisse R_0 de bidegré $(2,2)$ dans W,

$$r_0 = f_{00}(y)x_0^2 + f_{01}(y)x_0x_1 + f_{11}(y)x_1^2,$$

où f_{00}, f_{01} et f_{11} sont des formes quadratiques ;

— $\pi : X \to W$, le revêtement double ramifié en R_0, que l'on considère dans son plongement dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$:

$$V(x_2^2 - r_0(x,y)) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}), \quad \pi : X \xrightarrow{2:1} W, \ \pi : (x_0, x_1, x_2, y) \mapsto (x_0, x_1, y) \ ;$$

— $\mathcal{R} = \pi^{-1}(R_0) \subset X$ le diviseur de ramification ;

— $H_1 = [O(1)]$, $H_2 = [p^*O_{\mathbb{P}^2}(1)]$, des classes dans $\mathrm{Pic}\,(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$, et $H_i' = H_i|_X$, leurs restrictions à X.

Remarquons qu'on peut donner les revêtements doubles de ce type par des equations plus générales,

$$V_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(x_2^2 + x_2 q_1(x_0, x_1, y) + q_2(x_0, x_1, y)) \xrightarrow{2:1} W = V_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(x_2), \quad (x_0, x_1, x_2, y) \mapsto (x_0, x_1, y),$$

où $q_k = q_k(x_0, x_1, y) \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(k) \otimes p^* O_{\mathbb{P}^2}(k))$, $k = 1, 2$. Une telle équation se transforme en une équation de la forme $x_2^2 - r_0$ avec $r_0 = q_1^2 - 4q_2$ par un changement de coordonnées.

Lemme 5.3.35. *Soit $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ le plongement naturel. Alors*
(i) Le morphisme $i_{X*} : \mathrm{Pic}\,(X) \to \mathrm{CH}_2(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ est injectif.
(ii) Le fibré anticanonique de X est $-K_X = H_1' + 2H_2' = \pi^*(H_1|_W + 2H_2|_W)$, et $\dim | - K_X| = 14 = \dim \left| H_1|_W + 2H_2|_W \right| + 3$.
(iii) On peut engendrer les espaces de sections de fibrés en droites suivants sur X par leurs bases monomiales explicites :

$$H^0(X, O(H_1')) = \langle x_0, x_1 \rangle, \; H^0(X, O(H_2')) = \langle y_0, y_1, y_2 \rangle, \; H^0(X, O(-K_X)) = \langle x_i y_j y_k, \; x_2 y_l \rangle_{0 \leq i \leq 1, \; 0 \leq j \leq k \leq 2, \; 0 \leq l \leq 2}.$$

Démonstration. Similaire à celle du lemme 5.3.32.

□

Proposition 5.3.36. *(i) Les variétés de Fano $X = V(x_2^2 - r_0(x_0, x_1, y)) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ comme ci-dessus ont une structure d'un fibré en coniques, donnée par la projection $p|_X : X \to \mathbb{P}^2$. La courbe discriminante $\Delta = V(f_{01}^2 - 4f_{00}f_{11}) \subset \mathbb{P}^2$ de ce fibré en coniques est de degré 4 et de genre 3.*
(ii) Une surface K3 $S \in |-K_X|$ peut être représentée sous la forme $S = V(x_2^2 - r_0(x_0, x_1, y), x_0 g_0(y) + x_1 g_1(y) + x_2 l(y)) = X \cap V(x_0 g_0(y) + x_1 g_1(y) + x_2 l(y)) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$, où g_0, g_1 sont des formes quadratiques et l est une forme linéaire en y.
(iii) Soit S une surface K3 comme dans (i). Alors $\mathrm{Pic}\,(S)$ contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H_1'] \oplus \mathbb{Z}[H_2']$ muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, où $H_i' = H_i|_S$. La surface S est primitivement polarisée par la classe ample $H_1' + H_2'$ de degré 10. Une surface K3 générique de K_{10}^R s'obtient par cette procédure.
(iv) Pour une surface K3 S générique, comme dans (ii), le champ de modules $\mathcal{F}_S^R$ est représenté par un ouvert B de $\mathbb{P}^2$.
(v) Soit $B^o \subset B$ l'ouvert des $t \in B$ tels que la courbe discriminante $\Delta_t \subset \mathbb{P}^2$ est lisse. Alors $\tilde{\Delta}_t := F_1(X_t/\mathbb{P}^2)$ est lisse, le revêtement double $\tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$ est non ramifié, et la jacobienne intermédiaire relative de la restriction $f_{B^o} : \mathcal{X}_{B^o} \to B^o$ de la famille universelle $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ des extensions de Fano de S est isomorphe à la variété de Prym relative $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\boldsymbol{\Delta}}/\boldsymbol{\Delta}) \to B^o$, où $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \boldsymbol{\Delta}$ désignent les familles des courbes $\tilde{\Delta}_t, \Delta_t$ sur tous les $t \in B^o$.

Démonstration.
La démonstration est très similaire à celle de la proposition 5.3.33, avec l'usage du lemme 5.3.35 au lieu du lemme 5.3.32, et avec une simplification importante due au fait qu'on arrive à paramétrer les extensions de Fano de S sans paramètres redondants et que l'espace de modules $B = F_S^R$ porte une famille universelle. Pour l'utiliser plus tard, on explicite cette famille ici.

Etant donnée une extension de Fano $X_0 = V(s_0)$ de $S = V(s_0, s_{K3})$, où $s_0 = x_2^2 - r_0 \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(2H_1 + 2H_2))$, $s_{K3} = x_0 g_0(y) + x_1 g_1(y) + x_2 l(y) \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), O(H_1 + 2H_2))$, toutes les extensions de Fano de S s'écrivent sous la forme

$$X = V(s) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}), \quad s = t_0 s_0 + (t_1 x_0 + t_2 x_1) s_{K3}, \quad (t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{P}^2, \tag{5.3.9}$$

et B est l'ouvert des $t \in \mathbb{P}^2$ pour lesquels $V(s)$ est lisse. L'ouvert B a la bonne dimension, égale à $2 = \frac{1}{2} b_3(X)$, et la démonstration du fait que l'application classifiante $B \to F_S^R$ de la famille (5.3.9) est un isomorphisme s'appuie, comme d'habitude, sur la trivialité du groupe $\mathrm{Aut}^R(S)$. Cela se fait par des arguments qu'on a utilisés dans de nombreux autres cas et qu'on ne détaille pas ici, voir les exemples d'application de ce genre d'arguments dans les démonstrations du point (iv) des propositions 5.3.8, 5.3.22, 5.3.26.

□

Les variétés de Fano de la **famille 1 de nombre de Picard 3** sont les revêtements doubles de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ramifiés en un diviseur de type $(2, 2, 2)$.

On utilisera les notations suivantes :

— $W = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, aux coordonnées $x = (x_0, x_1)$, $y = (y_0, y_1)$ et $z = (z_0, z_1)$ sur les trois facteurs du produit direct ;

— $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, aux coordonnées $y = (y_0, y_1)$ et $z = (z_0, z_1)$ sur les facteurs ;

— $\mathcal{G}(i, j)$, le twist par $f^*(O_Q(i, j))$ pour tout morphisme $f : Z \to Q$ et pour tout faisceau de O_Z-modules $\mathcal{G}$;

— $\mathcal{E} = O_Q \oplus O_Q \oplus O_Q(-1, -1)$, le fibré vectoriel de rang 3 sur Q ;

— $p : \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{Q}$, le projectivisé de $\mathcal{E}$ avec sa projection sur Q naturelle ;

— $O_{\mathbb{P}/Q}(1)$, le fibré en droites tautologique ;

— (x_0, x_1, x_2), les coordonnées homogènes sur les fibres de $\mathbb{P}$, où $x_0, x_1 \in H^0(\mathbb{P}, O_{\mathbb{P}/Q}(1))$ correspondent aux sections 1 des deux facteurs O_Q de la somme directe lors de l'identification canonique $p_* O_{\mathbb{P}/Q}(1) = \mathcal{E}$, et $x_2 \in H^0(\mathbb{P}, O_{\mathbb{P}/Q}(1) \otimes p^* O_Q(1, 1))$ correspond à la section 1 du troisième facteur, canoniquement isomorphe à O_Q, de la décomposition en somme directe de $p_*(O_{\mathbb{P}/Q}(1) \otimes p^* O_Q(1, 1)) = \mathcal{E}(1, 1)$;

— on identifiera W avec le diviseur $V_{\mathbb{P}}(x_2)$ de $\mathbb{P}$, ce qui permet d'identifier les coordonnées x_0, x_1 du premier facteur de W avec les restrictions $x_0|_W, x_1|_W$ de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}$;

— $r_0 = r_0(x, y, z)$, l'équation d'un diviseur lisse R_0 de bidegré $(2, 2, 2)$ dans W,

$$r_0 = f_{00}(y, z)x_0^2 + f_{01}(y, z)x_0 x_1 + f_{11}(y, z)x_1^2,$$

où f_{00}, f_{01} et f_{11} sont des polynômes bi-homogènes de degré $(2, 2)$;

— $\pi : X \to W$, le revêtement double ramifié en R_0, que l'on considère dans son plongement dans $\mathbb{P}$:

$$V(x_2^2 - r_0(x, y, z)) \subset \mathbb{P}, \quad \pi : X \xrightarrow{2:1} W, \; \pi : (x_0, x_1, x_2, y, z) \mapsto (x_0, x_1, y, z) \; ;$$

— $\mathcal{R} = \pi^{-1}(R_0) \subset X$ le diviseur de ramification ;

— $H_1 = [O_{\mathbb{P}/Q}(1)]$, $H_2 = [p^* O_Q(1, 0)]$, $H_3 = [p^* O_Q(0, 1)]$ des classes dans $\mathrm{Pic}\,(\mathbb{P})$, et $H_i' = H_i|_X$, leurs restrictions à X ;

— H_{iW}, le relèvement à W de la classe $[O_{\mathbb{P}^1}(1)]$ du i-ième facteur.

Remarquons qu'on peut donner les revêtements doubles de ce type par des equations plus générales,

$$V_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(x_2^2 + x_2 q_1(x, y, z) + q_2(x, y, z)) \xrightarrow{2:1} W = V_{\mathbb{P}}(x_2), \quad (x_0, x_1, x_2, y, z) \mapsto (x_0, x_1, y, z),$$

où $q_k \in H^0(\mathbb{P}, O_{\mathbb{P}/Q}(k) \otimes p^* O_Q(k, k))$, $k = 1, 2$. Une telle équation se transforme en une équation de la forme $x_2^2 - r_0$ avec $r_0 = q_1^2 - 4q_2$ par un changement de coordonnées.

Lemme 5.3.37. *Soit $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{P}$ le plongement naturel. Alors :*

(i) Le morphisme $i_{X*} : \mathrm{Pic}\,(X) \to \mathrm{CH}_2(\mathbb{P})$ est injectif.

(ii) La classe anticanonique de X est $-K_X = \pi^*(H_{1W} + H_{2W} + H_{3W}) = H_1' + H_2' + H_3'$ et $\dim(|-K_X|) = 8 = \dim(|O_W(H_{1W} + H_{2W} + H_{3W})|) + 1$.

(iii) Les 9 sections suivantes forment une base de $H^0(X, O(-K_X)) = H^0(X, O(H_1' + H_2' + H_3'))$:

$$x_2, \; x_i y_j z_k, \quad \text{où} \; i, \; j, \; k \in \{0, 1\}.$$

Démonstration. Standard.

□

Proposition 5.3.38. *(i) Les variétés de Fano $X = V(x_2^2 - r_0) \subset \mathbb{P}$ comme ci-dessus ont une structure d'un fibré en coniques, donnée par la projection $p|_X : X \to Q$. La courbe discriminante $\Delta = V(f_{01}^2 - 4f_{00}f_{11}) \subset Q$ de ce fibré en coniques est de bidegré $(4, 4)$ et de genre 9.*

(ii) Une surface K3 $S \in |-K_X|$ peut être représentée sous la forme $S = V(x_2^2 - r_0(x, y, z),\; x_0 l_0(y, z) + x_1 l_1(y, z) + c x_2) = X \cap V(x_0 l_0 + x_1 l_1 + c x_2) \subset \mathbb{P}$, où l_i sont de bidegré $(1, 1)$ et c est une constante.

(iii) Soit S une surface $K3$ comme dans (ii). Alors Pic(S) *contient le sous-réseau primitif $R = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{Z}[H_i']$ muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, où H_i' dénote $H_i|_S$. La surface S est primitivement polarisée par la classe ample $H_1' + H_2' + H_3'$ de degré 6. Une telle surface $K3$ S est générique dans K_6^R.*

(iv) Pour une surface $K3$ S générique, comme dans (ii), le champ de modules F_S^R est un ouvert de la forme $[U/G]$ du champ quotient $[\mathbb{A}^{10}/G]$, où $G = \mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a$ U est un ouvert de l'espace affine $\mathbb{A}^{10}$, au-dessus duquel il existe une famille localement semi-universelle $f : \mathcal{X} \to U$ des extensions de Fano de S.

(iv) Soit $U^o \subset U$ l'ouvert des $t \in U$ tels que la courbe discriminante $\Delta_t \subset Q$ est lisse. Alors $\tilde{\Delta}_t := F_1(X_t/Q)$ est un revêtement double non ramifié, et la jacobienne intermédiaire relative de la restriction $f_{U^o} : \mathcal{X}_{U^o} \to U^o$ à U^o de la famille semi-universelle $f : \mathcal{X} \to U$ est isomorphe à la variété de Prym relative Prym$(\tilde{\boldsymbol{\Delta}}/\boldsymbol{\Delta}) \to U^o$, *où $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \boldsymbol{\Delta}$ désignent les familles des courbes $\tilde{\Delta}_t, \Delta_t$ sur tous les $t \in U^o$.*

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de la proposition 5.3.33. On peut décrire la famille localement semi-universelle et l'action de G comme suit. Soit $X_0 = V(s_0)$ une extension de Fano de $S = V(s_0, s_{K3})$ comme dans l'énoncé : $s_0 = x_2^2 - r_0$, $s_{K3} = x_0 l_0(y,z) + x_1 l_1(y,z) + c x_2$. Alors toutes les extensions de Fano de S s'écrivent sous la forme

$$X = V(s) \subset \mathbb{P}, \quad s = t_0 s_0 + \left(t_1 x_2 + \sum_{(i,j,k) \in \{0,1\}^3} t_{ijk} x_i y_j z_k \right) s_{K3}, \quad (t_0, t_1, (t_{ijk})) \in \mathbb{A}^{10},$$

et un élément $(\lambda, \mu) \in G = \mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a$ agit par l'automorphisme de $\mathbb{P}$ qui fixe S point par point :

$$(\lambda, \mu) : (x, x_2, y, z) \mapsto (\lambda x, \lambda x_2 + \mu s_{K3}, y, z).$$

$\square$

Famille 6 de nombre de Picard 2

Les variétés de Fano de ce type sont les revêtements doubles d'un diviseur non dégénéré W de bidegré $(1,1)$ de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, ramifiés en une surface $R_0 \in |-K_W|$. La non-dégénérescence de W signifie que les projections de W sur les deux facteurs $\mathbb{P}^2$ sont surjectives, ou encore que pour un choix convenable de coordonnées x_i, y_i sur les deux facteurs, W est donné par l'équation $x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 = 0$. On peut également définir W comme le projectivisé du fibré (co)tangent de $\mathbb{P}^2$.

On utilisera les notations suivantes :

— $(x_i), (y_i), i = 0,1,2$, des coordonnées sur les deux facteurs de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, et $W = V(h_{1,1}) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, où $h_{1,1} = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$;

— pr_i, la projection $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ sur le i-ième facteur $(i = 1,2)$ ou sa restriction à W ;

— $\mathcal{G}(i,j)$, le twist par $f^*(O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(i,j))$ pour tout morphisme $f : Z \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ et pour tout faisceau de O_Z-modules $\mathcal{G}$;

— $\mathcal{E} = O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(-1,-1)$, le fibré vectoriel de rang 2 sur $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$;

— $p : \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, le projectivisé de $\mathcal{E}$ avec sa projection sur $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ naturelle ;

— $O(1) = O_{\mathbb{P}/\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(1)$, le fibré en droites tautologique de Grothendieck, et L, sa classes dans Pic$(\mathbb{P})$;

— $(\xi_j)_{j=0,1}$, les coordonnées homogènes sur les fibres de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, vues comme des sections de $O(1) \otimes p^* O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(j,j)$ et choisies de telle façon, que les identifications canoniques

$$p_*\Big(O(1) \otimes p^* O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(j,j)\Big) = \mathcal{E} \otimes O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(j,j) = O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(j,j) \oplus O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(j-1,j-1)$$

transforment ξ_j en la section 1 du facteur $O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}$ de la somme directe ;

— $r_0 = r_0(x,y)$, l'équation d'un diviseur lisse de bidegré $(2,2)$ dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, ainsi que sa restriction à W ;

— $R_0 = V_W(r_0) = V_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(r_0, h_{1,1})$;

— $\pi : X \to W$, le revêtement double de W ramifié en R_0, que l'on considère dans son plongement dans $\mathbb{P}$:

$$V(\xi_1^2 - \xi_0 r_0(x,y), h_{1,1}(x,y)) \subset \mathbb{P}, \quad \pi = p|_X : X \xrightarrow{2:1} W, \ \pi : (\xi_0, \xi_1, x, y) \mapsto (x,y) \ ;$$

— H_i $(i = 1,2)$, le relèvement à $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ de la classe de la section hyperplane du i-ième facteur, ainsi que sa restriction à W ; $H_i' = \pi^*(H_i)$ le relèvement à X.

Remarquons qu'on peut donner les revêtements doubles $X \to W$ de ce type par des équations plus générales comme celles-ci :

$$V(\xi_1^2 + q_{1,1}(x,y)\xi_0\xi_1 + q_{2,2}(x,y)\xi_0^2, h_{1,1}(x,y)) \subset \mathbb{P}, \quad \pi = p|_X : X \xrightarrow{2:1} W, \ \pi : (\xi_0, \xi_1, x, y) \mapsto (x,y),$$

où $q_{k,k} \in H^0(\mathbb{P}, p^*O_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}(k,k))$, $k = 1,2$. Cette représentation se transforme en la représentation normalisée avec une équation de la forme $\xi_1^2 - \xi_0 r_0(x,y)$, où $r_0 = q_{1,1}^2 - 4q_{2,2}$, par un changement de coordonnées.

Lemme 5.3.39. *Notons $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{P}$ le plongement naturel.*

(i) Le morphisme $i_{X*} : \mathrm{Pic}\,(X) \hookrightarrow \mathrm{CH}_2(\mathbb{P})$ est injectif.

(ii) La classe anticanonique est $-K_X = H_1' + H_2'$ et $\dim|-K_X| = \dim|H_1+H_2|_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2} = \dim|H_1+H_2|_W + 1 = 8$.

(iii) La restriction $O(1)|_X$ est triviale, la section ξ_0 de $O(1)$ ne s'annulant nulle part sur X. On a donc $-K_X = i_X^*(O(1)\otimes p^*O_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}(1,1)) = i_X^* p^*(O_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}(1,1))$. Le morphisme $i_X^* : H^0(\mathbb{P}, O(1)\otimes p^*O_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}(1,1)) \to H^0(X, -K_X)$ entre les espaces vectoriels de dimensions respectives 10 et 9 est surjectif au noyau de dimension 1, engendré par $\xi_0 h_{1,1}$.

Démonstration. Standard. □

Proposition 5.3.40. *(i) Les variétés de Fano $X = V(\xi_1^2 - \xi_0 r_0(x,y), h_{1,1}(x,y)) \subset \mathbb{P}$ comme ci-dessus ont une structure d'un fibré en coniques, donnée par la composée $\theta = \mathrm{pr}_2 \circ p|_X : X \to \mathbb{P}^2$. La courbe discriminante $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ de ce fibré en coniques est de degré 6 et de genre 10.*

(ii) Une surface K3 $S \in |-K_X|$ peut être représentée sous la forme

$$S = V(\xi_1^2 - \xi_0 r_0(x,y), h_{1,1}(x,y), \xi_0 l_{1,1}(x,y) + c\xi_1) = X \cap V(\xi_0 l_{1,1}(x,y) + c\xi_1) \subset \mathbb{P},$$

où c est une constante et $l_{1,1}$ une forme bihomogène de bidegré $(1,1)$. L'image $S_0 = p(S) \subset W$ est génériquement une surface K3 isomorphe à S, intersection complète de deux diviseurs de bidegrés $(1,1)$ et $(2,2)$ dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$:

$$S_0 = p(S) = V(c^2 l_{1,1}(x,y)^2 - r_0(x,y), h_{1,1}(x,y)) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2.$$

Il y a aussi dans le système anticanonique $|-K_X|$ des surfaces lisses K3 S spéciales, pour lesquelles $S_0 = p(S)$ est une surface de Del Pezzo de degré 6 et la projection $p_{|S} = \pi_{|S} : S \to S_0$ est un revêtement double ramifié en $R_0 \cap S_0$. Ces membres spéciaux de $|-K_X|$ correspondent à la valeur $c = 0$.

(iii) Soit S une surface K3 comme dans (ii). Alors $\mathrm{Pic}\,(S)$ contient le sous-réseau primitif $R = \mathbb{Z}[H_1'] \oplus \mathbb{Z}[H_2']$ muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, où on dénote la restriction $H_i'|_S$ de $H_i' \in \mathrm{Pic}\,X$ par le même symbole. La surface S est primitivement polarisée par la classe ample $H_1' + H_2'$ de degré 12. Une telle surface K3 S est générique dans K_{12}^R.

(iv) L'espace de modules F_S^R est un ouvert B de $\mathbb{P}^9$.

(v) Soit $B^o \subset B$ l'ouvert des $t \in B$ tels que la courbe discriminante $\Delta_t \subset \mathbb{P}^2$ est lisse. Alors $\tilde{\Delta}_t := F_1(X_t/\mathbb{P}^2)$ est lisse, le revêtement double $\tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$ est non ramifié, et la jacobienne intermédiaire relative de la restriction $f_{B^o} : \mathcal{X}_{B^o} \to B^o$ de la famille universelle $f_B : \mathcal{X}_B \to B$ des extensions de Fano de S est isomorphe à la variété de Prym relative $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\boldsymbol{\Delta}}/\boldsymbol{\Delta}) \to B^o$, où $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \boldsymbol{\Delta}$ désignent les familles des courbes $\tilde{\Delta}_t, \Delta_t$ sur tous les $t \in B^o$.

Démonstration.

La démonstration suit le même schéma que celle de la proposition 5.3.33. La démonstration de la partie (iv) s'appuie sur une donnée explicite d'une famille localement universelle d'extensions de Fano de S, paramétrée par un ouvert de $\mathbb{P}^9$, que l'on peut décrire comme suit.

Etant donnée une extension de Fano $X_0 = V(s_0, h_{1,1})$ de $S = V(s_0, s_{K3}, h_{1,1})$, où $s_0 = \xi_1^2 - \xi_0 r_0(x,y) \in H^0(\mathbb{P}, O(2L + 2H_1 + 2H_2))$ et $s_{K3} = \xi_0 l_{1,1}(x,y) + c\xi_1 \in H^0(\mathbb{P}, O(L + H_1 + 2H_2))$, toutes les extensions de Fano de S s'écrivent sous la forme

$$X = V(s) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}), \quad s = t_0 s_0 + \left(\sum_{i=1}^{9} t_i M_i\right) s_{K3}, \quad (t_0, \ldots, t_9) \in \mathbb{P}^9, \tag{5.3.10}$$

où $(M_1 \ldots, M_9)$ est une base quelconque d'un sous-espace de dimension 9 de l'espace vectoriel $H^0(\mathbb{P}, O(L+H_1+H_2))$ de dimension 10, supplémentaire au noyau de la restriction à X, lequel est engendré par $\xi_0 h_{1,1}$ d'après le lemme 5.3.39. Les seuls automorphismes de $\mathbb{P}$ qui fixent S sont $(\xi_0, \xi_1) \mapsto (\lambda\xi_0, \lambda\xi_1 + \mu_1 s_{K3} + \mu_2 h_{1,1})$, mais le sous-groupe $\mathbb{G}_a$ de paramètre μ_2 agit de façon triviale sur $p^{-1}(W)$, donc sur toute la famille (5.3.10), et on peut le supprimer, et les transformations avec $\mu_1 \neq 0$ ne préservent pas W. Il ne reste que les homothéties, qui agissent de façon triviale sur le projectivisé. Cela démontre que la famille (5.3.10) n'a pas d'automorphismes.

□

5.3.11 Les éclatés de revêtements doubles

Éclaté de V_2 en une courbe lisse

Il n'y a qu'une seule famille rentrant dans ce cas. C'est la **famille 3 de nombre de Picard 2**.

Les variétés de Fano de cette famille sont les éclatés $X = \tilde{V}_C$ des variétés de Fano $V = V_2$ d'indice 2 en une courbe lisse C. Les variétés V sont des revêtements doubles de $\mathbb{P}^3$ ramifiés en une quartique lisse, et C est une courbe elliptique image réciproque d'une droite de $\mathbb{P}^3$. On introduit les notations :

- — $x = (x_0, \ldots, x_3)$, les coordonnées de $\mathbb{P}^3$, et H, la section hyperplane de $\mathbb{P}^3$ ou ces tirés en arrière par certains morphismes ;
- — $R_0 \in |4H| \subset \mathbb{P}^3$, une quartique $K3$ lisse d'équation $r_0 = 0$;
- — $\mathcal{E} = O_{\mathbb{P}^3} \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-2)$, le fibré vectoriel de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$;
- — $p : \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^3$, le projectivisé de $\mathcal{E}$ avec sa projection sur $\mathbb{P}^3$ naturelle ;
- — $O(1) = O_{\mathbb{P}/\mathbb{P}^3}(1)$, le fibré en droites tautologique, et $L = c_1(O(1))$;
- — (ξ_0, ξ_1), les coordonnées sur les fibres de $\mathbb{P}$ au-dessus de $\mathbb{P}^3$, vues comme des sections de $O(1) \otimes p^* O_{\mathbb{P}^3}(2j)$ et choisies de telle façon, que les identifications canoniques
$$p_*\Big(O(1) \otimes p^* O_{\mathbb{P}^3}(2j)\Big) = \mathcal{E} \otimes O_{\mathbb{P}^3}(2j) = O_{\mathbb{P}^3}(2j) \oplus O_{\mathbb{P}^3}(2(j-1))$$
transforment ξ_j en la section 1 du facteur $O_{\mathbb{P}^3}$ de la somme directe, $j = 0, 1$;
- — $\pi = p|_V : V = V_{\mathbb{P}}(\xi_1^2 - \xi_0^2 r_0) \to \mathbb{P}^3$, le revêtement double ramifié en R_0 ;
- — $R_1 = \pi^{-1}(R_0)$, le diviseur de ramification dans V, et H', L', les tirés en arrière de H, L sur V ;
- — ℓ, une droite de $\mathbb{P}^3$;
- — $C = \pi^{-1}(\ell)$, une courbe elliptique dans V de degré 2 par rapport à H' ;
- — $X = \tilde{V}_C$, l'éclatement de V en C ;
- — $\epsilon : X = \tilde{V}_C \to V$, le morphisme de contraction naturel ;
- — $\mathcal{R} \subset X$, le transformé strict de R_1.

Remarquons qu'on peut donner les revêtements doubles $V \to \mathbb{P}^3$ comme ci-dessus par des equations plus générales,

$$V_{\mathbb{P}}(\xi_1^2 + \xi_0\xi_1 q_2(x) + \xi_0^2 q_4(x)) \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^3, \quad (\xi_0, \xi_1, x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, x_1, x_2),$$

où $q_{2k} \in H^0(\mathbb{P}^3, O_{\mathbb{P}^3}(2k))$, $k = 1, 2$. Une telle équation se transforme en une équation de la forme $\xi_1^2 - \xi_0^2 r_0$ avec $r_0 = q_2^2 - 4q_4$ par un changement de coordonnées.

Proposition 5.3.41. *(i) Si $S \in |-K_X|$ est une surface $K3$ diviseur anticanonique de X, alors $S_1 = \epsilon(S) \subset V$ contient C et appartient à $|-K_V| = |2H'|$. L'image $S_0 = \pi(S_1)$ dans $\mathbb{P}^3$ est une quadrique contenant ℓ, et $\pi|_{S_1} : S_1 \to S_0$ est un revêtement double.*

(ii) Soit $S \subset X$ comme dans (i). Alors le réseau de Picard de S contient le sous-réseau $R = \mathbb{Z}[H'] \oplus \mathbb{Z}[C]$ muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, où H' dénote ici $H|_S$.

(iii) Une surface K3 générique de K_4^R s'obtient par cette procédure. Une surface K3 générique de K_4^R ne contient que deux pinceaux elliptiques de H'-degré 2, qui sont $|C|$ et $|H'-C|$.

(iv) Le champ de modules $\mathcal{F}_S^R$ est le produit direct $\mathcal{F}_{S_1}^{\overline{R}} \times (|C|_{S_1}^\circ \sqcup |H'-C|_{S_1}^\circ)$, où $|\cdot|_{S_1}^\circ$ désigne la partie ouverte d'un système linéaire de courbes sur S_1 paramétrant les courbes lisses. Le premier facteur $\mathcal{F}_{S_1}^{\overline{R}}$ est le champ de modules des variétés de Fano V_2 extensions de la surface K3 S_1, où $\overline{R} = \mathbb{Z}H$ avec élément marqué $2H$. Le champ $\mathcal{F}_{S_1}^{\overline{R}}$, de dimension 10, se représente sous la forme du champ quotient $[U/G]$, où $G = \mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a$ agit linéairement sur l'espace affine $\mathbb{A}^{12}$ et U est un ouvert invariant, qui porte une famille localement semi-universelle des extensions de Fano de S_1 du type V_2 et sur lequel l'action est libre. L'espace de modules grossier $B = U/G$ existe en tant que schéma, et l'application quotient $U \to B$ est un G-fibré principal.

(v) La fibration lagrangienne de jacobiennes intermédiaires $\mathcal{J}(\mathcal{X}/\mathcal{F}_S^R) \to \mathcal{F}_S^R$ de la famille universelle $\mathcal{X}/\mathcal{F}_S^R$ des extensions de Fano de S est le produit direct de deux familles : la famille des jacobiennes intermédiaires $\mathcal{J}(\mathcal{V}_2/\mathcal{F}_{S_1}^{\overline{R}}) \to \mathcal{F}_{S_1}^{\overline{R}}$ de la famille universelle $\mathcal{V}_2/\mathcal{F}_{S_1}^{\overline{R}}$ des extensions de S_1 du type V_2, et la réunion disjointe de deux jacobiennes relatives de pinceaux elliptiques dans S_1, qui peut être vue comme une partie ouverte de la fibration lagrangienne compactifiée

$$M_{S_1}^{H'}(0,[C],0) \sqcup M_{S_1}^{H'}(0,[H'-C],0) \to |C|_{S_1}^\circ \sqcup |H'-C|_{S_1}^\circ \simeq \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1,$$

donnée par l'application du support des faisceaux.

Démonstration. La démonstration utilise des arguments standard que nous avons utilisés à plusieurs reprises dans d'autres cas. Il est évident que l'espace de module se décompose en produit direct, qui sont traités séparément. On précise ici la famille localement semi-universelle des variétés du type V_2 qui sont des extensions de S_1, dont l'existence est utilisée dans la démonstration du point (iv). Fixons $S_1 = V(s_0, s_{K3}) \subset \mathbb{P}$, où $s_0 = \xi_1^2 - \xi_0^2 r_0(x) \in H^0(\mathbb{P}, O(2L+4H))$ définit une extension particulière V_0 du type V_2 de S_1, et $s_{K3} \in H^0(\mathbb{P}, O(2H))$ est l'équation de la quadrique S_0 ; si $\ell = V(h_1, h_2)$, alors on peut écrire $s_{K3} = h_1 l_1 + h_2 l_2$, où les h_i, l_i sont des formes linéaires sur $\mathbb{P}^3$. Remarquons que le membre générique du système linéaire $-K_{V_0}$ se projette de façon bijective sur une quartique de $\mathbb{P}^3$, mais lorsque on impose la condition $C \subset S_1$, où C est un revêtement double de son image ℓ dans $\mathbb{P}^3$, on ne laisse que les diviseurs S_1 de $|-K_{V_0}|$ qui sont des revêtements doubles des quadriques de $\mathbb{P}^3$.

Maintenant on peut écrire toute extension de S_1 du type V_2 sous la forme

$$V = V(s) \subset \mathbb{P},\ s = t_0 s_0 + \sigma s_{K3},\ \text{où } \sigma \in H^0(\mathbb{P}, O(2L+2H)),\ \sigma = \xi_0 \left(t_1 \xi_1 + \sum_{0 \le i \le j \le 3} t_{ij} x_i x_j \right), \tag{5.3.11}$$

l'espace affine $\mathbb{A}^{12}$ ayant (t_0, t_1, t_{ij}) pour coordonnées. L'ouvert U paramètre les variétés $V(s)$ lisses, et l'action de $G = \mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a$ est donnée par

$$(\lambda, \mu) : (\xi_0, \xi_1, x) \mapsto (\lambda \xi_0, \lambda \xi_1 + \mu s_{K3}, x).$$

□

Éclaté de revêtement double de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ en une courbe lisse

Il n'y a qu'une famille rentrant dans ce cas. C'est la **famille 4 de nombre de Picard 3**. Les variétés de Fano en question sont les éclatés des variété de Fano X de la **famille 18 de nombre de Picard 2** (voir proposition 5.3.36) en une fibre lisse du fibré en coniques $X \to \mathbb{P}^2$.

On reprend les notations de la page 128. On rappelle que X est plongée dans $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E} = O_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-1)$, et que

$$X = V(x_2^2 - r_0(x_0, x_1, y)) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}),\quad \pi : X \xrightarrow{2:1} W,\ \pi : (x_0, x_1, x_2, y) \mapsto (x_0, x_1, y)\ ,$$

où $y = (y_0, y_1, y_2)$ sont les coordonnées de $\mathbb{P}^2$, (x_0, x_1, x_2) sont les coordonnées homogènes sur les fibres de $\mathbb{P} \to \mathbb{P}^2$, W est le diviseur de $\mathbb{P}$ défini par $W = V(x_2) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, les coordonnées bihomogènes sur W étant $((x_0, x_1), (y_0, y_1, y_2))$, l'application $\pi : X \to W$ est un revêtement double ramifié en la surface $R_0 = V(r_0)$ de bidegré $(2, 2)$, et la structure du fibré en coniques est donnée par la composée

$$\theta := p|_X : X \hookrightarrow \mathbb{P} \xrightarrow{\pi} W = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^2}} \mathbb{P}^2,\quad ((x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2)) \mapsto (y_0, y_1, y_2).$$

On choisit les coordonnées (y_i) de telle façon que la conique éclatée soit $C := \theta^{-1}(1:0:0)$, et on note par $\epsilon : \tilde{X} = \tilde{X}_C \to X$ la contraction inverse de l'éclatement de C, de diviseur exceptionnel E.

Proposition 5.3.42. *(i) Les variétés de Fano $\tilde{X}$ comme ci-dessus ont une structure d'un fibré en coniques $\tilde{\theta} : \tilde{X} \to \tilde{\mathbb{P}}^2$, obtenue par le changement de base dans le fibré en coniques $\theta : X \to \mathbb{P}^2$ relativement la contraction $\bar{\epsilon} : \tilde{\mathbb{P}}^2 = \tilde{\mathbb{P}}^2_{(1:0:0)} \to \mathbb{P}^2$ inverse de l'éclatement du point $(1:0:0)$. La courbe discriminante du fibré en coniques $\tilde{\theta}$ est projetée par $\bar{\epsilon}$ de façon isomorphe sur la courbe discriminante Δ de θ et sera notée par le même symbole. C'est l'image réciproque d'une quartique plane de genre 3 qui ne passe pas par $(1:0:0)$.*

(ii) Si $S \in |-K_{\tilde{X}}|$ est une surface $K3$ diviseur anticanonique de $\tilde{X}$, alors $S_0 = \epsilon(S) \in |-K_X|$ est une surface $K3$ contenant C, et $\epsilon|_S : S \to S_0$ est un isomorphisme. On peut représenter S_0 sous la forme $S_0 = X \cap V(x_0g_0(y) + x_1g_1(y) + x_2l(y)) \subset \mathbb{P}$, où $g, l \in (y_1, y_2, y_3) \subset \mathbb{C}[y_1, \dots, y_3]$ sont homogènes de degrés respectifs $2, 1$.

(iii) Soit $S \in |-K_X|$ une surface K3 comme dans (ii), $S_0 = \epsilon(S)$. Alors le réseau de Picard de S_0 contient le sous-réseau de rang trois $\tilde{R} = \mathbb{Z}[H_1'] \oplus \mathbb{Z}[H_2'] \oplus \mathbb{Z}[C]$ muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, où H_i' désigne ici $H_i|_{S_0}$, $i \in \{1, 2\}$. La surface S_0 est primitivement polarisée par la classe ample $H_1' + H_2'$ de degré 10. Une surface K3 générique dans $K_{10}^{\tilde{R}}$ s'obtient par cette procédure.

(iv) Pour une surface K3 S générique, comme dans (ii), l'espace de modules $F_S^{\tilde{R}}$ est un ouvert $\tilde{B}$ de $\mathbb{P}^2$.

(v) Soit $\tilde{B}^o \subset \tilde{B}$ l'ouvert des $t \in \tilde{B}$ tels que la courbe discriminante $\Delta_t \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ est lisse. Alors $\tilde{\Delta}_t := F_1(X_t/\mathbb{P}^2)$ est lisse, le revêtement double $\tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$ est non ramifié, et la jacobienne intermédiaire relative de la restriction $f_{\tilde{B}^o} : \mathcal{X}_{\tilde{B}^o} \to \tilde{B}^o$ de la famille universelle $f_{\tilde{B}} : \mathcal{X}_{\tilde{B}} \to \tilde{B}$ des extensions de Fano de S est isomorphe à la variété de Prym relative $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\boldsymbol{\Delta}}/\boldsymbol{\Delta}) \to \tilde{B}^o$, où $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \boldsymbol{\Delta}$ désignent les familles des courbes $\tilde{\Delta}_t, \Delta_t$ sur tous les $t \in \tilde{B}^o$.

Démonstration. Les démonstrations des points (i)-(iii) sont tout à fait standard, et on se limitera à donner quelques éléments de la démonstfation des points (iv), (v). La description du revêtement double X de W est identique à celle donnée dans proposition 5.3.36 avec S remplacée par S_0, et $\tilde{X} = X \times_{\mathbb{P}^2} \tilde{\mathbb{P}}^2$ est déterminée par X. Donc toutes les extensions de Fano de S appartenant à $\mathcal{F}_S^{\tilde{R}}$ s'obtiennent par l'éclatement $\tilde{X}_t$ de la fibre au dessus du point $(1:0:0)$ d'un des fibrés en coniques $X_t = V(s)$ donnés par (5.3.9), où $s = s(t)$ dépend du point $t = (t_0, t_1, t_2) \in B \subset \mathbb{P}^2$. Ici on note par B l'ouvert de $\mathbb{P}^2$ formé des t pour lesquels X_t est lisse, et on peut identifier B avec l'espace de modules $\mathcal{F}_{S_0}^R$, où R est le réseau de rang 2 introduit dans le point (ii) de la proposition 5.3.36, que l'on peut considérer comme plongé dans $\tilde{R}$:

$$R = Z[H_1'] \oplus \mathbb{Z}[H_2'] \subset \tilde{R} = Z[H_1'] \oplus \mathbb{Z}[H_2'] \oplus \mathbb{Z}[C].$$

Dans la proposition 5.3.36, on a affirmé que B représente le champ de modules $\mathcal{F}_{S_0}^R$ sous l'hypothèse de généricité de S_0 dans K^R, mais maintenant S_0 est générique dans $K^{\tilde{R}}$, ce qui représente une famille de surface K3 de codimension 1 dans K^R. Le rôle de la généricité dans la démonstration se réduisait à la propriété que le seul automorphisme de S_0 fixant R est l'identité. Or il est immédiat à vérifier que pour S_0 générique dans $K^{\tilde{R}}$, de sorte que $\mathrm{Pic}\,(S_0) = \tilde{R}$, tout automorphisme fixant R fixe aussi $\tilde{R}$. Pour cela on vérifie que $[C]$ est l'unique élément de $\tilde{R}$ qui satisfait équations $H_1' \cdot C = 2$, $H_2' \cdot C = 0$, $C^2 = -2$. Alors tout automorphisme de S_0 fixant $[H_1']$ et $[H_2']$, fixe automatiquement $[C]$, donc appartient à $\mathrm{Aut}\,^{\tilde{R}}(S_0)$. La trivialité du dernier groupe est démontré par les mêmes arguments que ceux utilisés dans les démonstrations du point (iv) des propositions 5.3.8, 5.3.22, 5.3.26. On conclut donc que $B \simeq \mathcal{F}_{S_0}^R$ pour S_0 générique dans $K^{\tilde{R}}$.

On remarque aussi que la fibre $\theta_t^{-1}(1:0:0)$ du fibré en coniques $\theta_t = p_{X_t} : X_t \to \mathbb{P}^2$ ne dépend pas de $t \in B$ et reste égale à C. Donc le lieu $\tilde{B}$ des $t \in \mathbb{P}^2$, pour lesquels $\tilde{X}_t$ est lisse, coïncide avec B, et on a $\mathcal{F}_S^{\tilde{R}} \simeq \tilde{B} = B \simeq \mathcal{F}_{S_0}^R$.

En ce qui concerne le point (v), l'éclatement de la courbe rationnelle $C \subset X_t$ ne change pas la jacobienne intermédiaire, et $\tilde{B}^o$ coïncide avec l'ouvert B^o du point (v) de la proposition 5.3.36. La description de la jacobienne relative dans le cas actuel est donc identique à celle de la proposition 5.3.36. □

Remarque 5.3.43. *Malgré la dernière assertion dans la démonstration de la proposition précédente, le problème de compactification pour la jacobienne intermédiaire de la famille actuelle (no. 4 au nombre de Picard 3) n'est pas* *identique à celui pour la famille no. 18 au nombre de Picard 2, car la première est un cas spécial, non générique de la seconde, et il faut s'attendre à ce que la famille actuelle admet des dégénérescences plus sévères que la seconde.*

5.4 Compactification partielle de la jacobienne intermédiaire relative dans le cas de la famille 18 au nombre de Picard 2

Dans cette section, on décrit une compactification partielle de la jacobienne intermédiaire relative $J(\mathcal{X}/B) \to B$ de la famille universelle $f : \mathcal{X} \to B$ des variétés de Fano construite dans la proposition 5.3.36 ; il s'agit du cas no. 18 au nombre de Picard 2 dans la classification de Mori–Mukai. C'est un exemple où dim $J(\mathcal{X}/B) = 4$ et B est un ouvert de $\mathbb{P}^2$. Dans cet exemple, on n'arrive pas à représenter la jacobienne intermédiaire relative comme la jacobienne d'un système linéaire de courbes sur une surface K3, donc la construction d'une compactification par un espace de modules de faisceaux de torsion sur une surface K3 avec la structure d'une fibration lagrangienne donnée par l'application du support des faisceaux est inapplicable. Vu la petite dimension, on peut espérer de pouvoir construire une compactification "à la main". Cependant, il se trouve que ce problème réclame des calculs volumineux et on n'arrive pas à construire une compactification complète, même avec l'aide du logiciel Macaulay2 [27] destiné aux calculs symboliques en géométrie algébrique. On présente ici des résultats partiels dans cette directions, dont une partie est vérifiée par des calculs à l'ordinateur.

On reprend les notations, introduites en rapport avec cette famille sur la page 128 et dans la proposition 5.3.36. On rappelle que X est plongée dans $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E} = O_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-1)$. On définit X et son application de revêtement double par

$$X = V(F) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}),\ \ F = x_2^2 - r_0(x_0, x_1, y) \in H^0(\mathbb{P}, O_{\mathbb{P}/\mathbb{P}^2}(2) \otimes p^* O_{\mathbb{P}^2}(2)),$$

$$\pi : X \xrightarrow{2:1} W = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2,\ \ (x_0, x_1, x_2, y) \mapsto (x_0, x_1, y)\ , \tag{5.4.1}$$

où $y = (y_0, y_1, y_2)$ sont les coordonnées sur le facteur $\mathbb{P}^2$ de W, (x_0, x_1, x_2) sont les coordonnées homogènes sur les fibres de $p : \mathbb{P} \to \mathbb{P}^2$, W est considéré comme le diviseur de $\mathbb{P}$ défini par $W = V(x_2) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, les coordonnées bihomogènes sur W étant $((x_0, x_1), (y_0, y_1, y_2))$, et le diviseur de ramification de π est

$$R_0 = V(r_0) \subset W,\ \ r_0 \in H^0(W, O(2, 2)),\ \ r_0 = f_{00}(y)x_0^2 + f_{01}(y)x_0x_1 + f_{11}(y)x_1^2,$$

où f_{00}, f_{01} et f_{11} sont des formes quadratiques en $y = (y_0, y_1, y_2)$. La structure du fibré en coniques sur X est donnée par la composée

$$\theta := p|_X : X \hookrightarrow \mathbb{P} \xrightarrow{\pi} W = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^2}} \mathbb{P}^2,\ \ ((x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2)) \mapsto (y_0, y_1, y_2).$$

On donne en plus un diviseur G de $\mathbb{P}$ du type suivant :

$$V_G = V(G),\ \ G \in H^0(\mathbb{P}, O_{\mathbb{P}/\mathbb{P}^2}(1) \otimes p^* O_{\mathbb{P}^2}(2)),\ \ G = x_2 l(y) + x_0 g_0(y) + x_1 g_1(y),$$

où l est une forme linéaire sur $\mathbb{P}^2$ et g_0, g_1 sont des formes quadratiques. On suppose que la surface $K3$ $S = V(F, G) = X \cap V_G$ est générique dans K^R, de sorte que Pic $(S) = R = \mathbb{Z}[H_1'] \oplus \mathbb{Z}[H_2']$ avec la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, où $H_i' = H_i|_S$, $H_1 = c_1(O_{\mathbb{P}/\mathbb{P}^2}(1))$, et $H_2 = c_1(p^* O_{\mathbb{P}^2}(1))$.

La famille universelle des extensions de Fano de S au réseau de Picard R avec l'élément marqué $H_1' + 2H_2' \in R$ s'obtient par une restriction de la famille compactifiée suivante :

$$\overline{\mathcal{X}} = V(t_0 F + (t_1 x_0 + t_2 x_1)G) \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^2,\ \ \overline{f} = \mathrm{pr}_{\mathbb{P}^2}|_{\overline{\mathcal{X}}} : \overline{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^2,\ \ X_t = \overline{f}^{-1}(t) \text{ pour } t = (t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{P}^2.$$

On dénote par B l'ouvert des $t \in \mathbb{P}^2$ tels que X_t est lisse, et on pose $\mathcal{X} = \overline{f}^{-1}(B)$, $f = \overline{f}|_{\mathcal{X}}$. Alors $B = F_S^R$ est l'espace de modules des extensions de Fano de S et $f : \mathcal{X} \to B$ est la famille universelle.

On introduit encore un ouvert plus petit $B^o \subset B$ des $t \in B$ pour lesquels la courbe discriminante Δ_t du fibré en coniques $\theta_t = p|_{X_t} : X_t \to \mathbb{P}^2$ est lisse. On note par $f_{B^o} : \mathcal{X}_{B^o} \to B^o$ la restriction de f. La variété $\mathcal{X}_{B^o}$ a alors une structure d'un fibré en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^2 \times B^o$. On note par $\mathbf{\Delta}$ la variété discriminante, $\mathbf{\Delta} = \bigcup_{t \in B^o} \Delta_t$, et par $\tilde{\mathbf{\Delta}} = \bigcup_{t \in B^o} \tilde{\Delta}_t$ le revêtement double paramétrant les droites, composantes des coniques singulières du fibré en coniques : $\tilde{\mathbf{\Delta}} = F_1(\mathcal{X}_{B^o}/\mathbb{P}^2 \times B^o)$, où $F_1(\cdot)$ dénote le schéma de Fano paramétrant les droites.

La proposition 5.3.36 représente la jacobienne intermédiaire relative de $\mathcal{X}_{B^o}/B^o$ comme la variété de Prym relative :

$$h : J(\mathcal{X}_{B^o}/B^o) = \mathrm{Prym}\,(\tilde{\mathbf{\Delta}}/\mathbf{\Delta}) \longrightarrow B^o.$$

Le fibres X_t s'écrivent pas des équations plus générales que l'équation normalisée (5.4.1) sans terme linéaire en x_2. On précise ces équations et l'équation $\delta = \delta_t$ de la variété discriminante du fibré en coniques qui en résulte :

$$X_t = V_{\mathbb{P}}(F_t),\ F_t = q_0 x_2^2 + q_1 x_2 + q_2,\ q_i = q_i(x_0, x_1, y, t),\ q_0 = t_0,\ q_1 = l(y)(t_1 x_0 + t_2 x_1),$$

$$q_2 = (x_0 g_0(y) + x_1 g_1(y))(t_1 x_0 + t_2 x_1) - t_0(f_{00}(y)x_0^2 + f_{01}(y)x_0 x_1 + f_{11}(y)x_1^2),$$

$$\delta_t = \delta(y,t) = \frac{1}{t_0} \begin{vmatrix} t_1 g_0 - t_0 f_{00} & \frac{1}{2}(t_1 g_1 + t_2 g_0 - t_0 f_{01}) & \frac{1}{2} t_1 l \\ \frac{1}{2}(t_1 g_1 + t_2 g_0 - t_0 f_{01}) & t_2 g_1 - t_0 f_{11} & \frac{1}{2} t_2 l \\ \frac{1}{2} t_1 l & \frac{1}{2} t_2 l & t_0 \end{vmatrix}, \tag{5.4.2}$$

où on a divisé par le facteur t_0, dont la présence est due au fait que pour $t_0 = 0$ la variété X_t devient réductible et toutes les fibres du "fibré en coniques" $\theta_t : X_t \to \mathbb{P}^2$ sont singulières. La variété discriminante $\overline{\mathbf{\Delta}} = V(\delta) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ qui en résulte est de bidegré $(4,2)$ par rapport aux coordonnées y, t, et la variété $\mathbf{\Delta}$ qu'on a introduite ci-dessus n'est autre que sa restriction au-dessus de B^o, $\quad \mathbf{\Delta} = \overline{\mathbf{\Delta}} \times_{\mathbb{P}^2} B^o$.

Pour étudier les dégénérescences du revêtement double $\tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$ lorsque t s'approche de $C_{\mathrm{disc}} := \mathbb{P}^2 \setminus B^o$, on a besoin de pouvoir représenter $\tilde{\Delta}_t$ par des équations. A la différence des courbes Δ_t, qui varient dans une surface, qui est $\mathbb{P}^2$, il n'y a, a priori, aucune surface lisse qui pourrait contenir la famille des courbes $\tilde{\Delta}_t$. Il se trouve qu'on peut les voir comme les normalisées de courbes dans la surface $K3$ S. Il convient à considérer S comme un revêtement double de $\mathbb{P}^2$.

Proposition 5.4.1.

(i) La projection $p|_S : S \to \mathbb{P}^2$ est un revêtement double, ramifié en la sextique lisse C_S d'équation

$$f_S(y) = 0, \quad f_S = \frac{1}{l^2}\Big((g_0^2 - l^2 f_{00})(g_1^2 - l^2 f_{11}) - (g_0 g_1 - l^2 f_{01})^2\Big).$$

(ii) Soit $t \in B^o$. Alors pour $y \in \Delta_t$ générique, les deux composantes $\mathbb{P}^1$ de la conique réductible $X_{t,y} = \theta_t^{-1}(y)$ coupent la surface S chacune en un point. Il en résulte que la courbe $\tilde{\Delta}_t$, paramétrant les composantes $\mathbb{P}^1$ des coniques réductibles au-dessus des points de Δ_t, est birationnelle au revêtement double $\Delta_{t,S} = (p|_S)^{-1}(\Delta_t)$ de Δ_t contenu dans S.

(iii) Pour $t \in B^o$, la quartique Δ_t est totalement tangente à la sextique C_S. Pour $t \in B^o$ générique, Δ_t et C_S ont 12 points distincts de tangence simple et pas d'autres intersections. La courbe $\Delta_{t,S}$ a alors 12 nœuds situés sur la courbe de ramification $\tilde{C}_S = (p|_S)^{-1}(C_S)$ au-dessus des points de tangence de Δ_t et C_S, et $\tilde{\Delta}_t$ est la normalisée de $\Delta_{t,S}$, que l'on peut obtenir par l'éclatement des 12 nœuds.

Démonstration.

(i) L'équation s'obtient par un calcul facile, et il reste à vérifier que $p|_S$ est fini. La finitude est équivalente à ce que S ne contient aucune composante d'aucune fibre $X_y = \theta^{-1}(y)$. Si on suppose que S contient une telle composante, disons ℓ, alors on aurait $\ell^2 = -2$, $\ell \cdot H_2' = 0$, et $\ell \cdot H_1' = 1$ ou 2 selon que ℓ est une droite ou une conique. La matrice d'intersections des trois courbes H_1', H_2', ℓ étant non dégénérée, on arrive à une contradiction avec l'hypothèse de généricité de S, impliquant que rg Pic $(S) = 2$.

(ii) Les équations $F = 0$ et $G = 0$ de S, lorsque on les considère pour y fixé, définissent une conique et une droite respectivement. D'après (i), la droite $G_y = 0$ ne peut jamais être une composante de la conique $F_y = 0$. La fibre $(p|_S)^{-1}(y)$ est l'intersection schématique $G_y = F_y = 0$. Si on suppose que la conique X_y d'équation $F_y = 0$ est réductible, l'intersection est formée de deux points distincts appartenant à deux composantes distinctes, sauf le cas où $G_y = F_y = 0$ est non réduite, est alors $y \in C_S$. Puisque C_S est une sextique lisse et donc irréductible, $\Delta_t \not\subset C_S$ et pour $y \in \Delta_t \setminus (\Delta_t \cap C_S)$, l'intersection est bien formée de deux points distincts appartenant à deux composantes distinctes.

(iii) Puisque $\Delta_{t,S}$ est birationnelle à $\tilde{\Delta}_t$, le revêtement $\Delta_{t,S} \to \Delta_t$ ne peut avoir de points de ramification. Donc Δ_t n'a pas d'intersections transverses avec C_S. La seule chose à vérifier est que génériquement l'intersection $C_S \cap \Delta_t$ est formée de 12 points distincts de tangence simple. On peut le faire par l'ordinateur : on crée des polynômes F, G comme ci-dessus aux coefficients choisis au hasard, puis on choisit un point $t \in \mathbb{P}^2$ au hasard, puis on calcule l'idéal du schéma $\Delta_t \cap C_S$ de longueur 24, puis son radical. Il se trouve que la longueur du schéma défini par le radical est 12, ce qui démontre l'assertion. $\square$

Cela permet de construire une compactification de la famille des revêtements doubles $\tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$.

Corollaire 5.4.2. *Soit $\overline{\boldsymbol{\Delta}} \to \mathbb{P}^2$ la famille de quartiques planes définie par (5.4.2), et soit $\widetilde{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}$ la normalisée du produit fibré $\overline{\boldsymbol{\Delta}} \times_{\mathbb{P}^2} S$. Alors la fibre du revêtement $\boldsymbol{\eta} : \widetilde{\overline{\boldsymbol{\Delta}}} \to \overline{\boldsymbol{\Delta}}$ au-dessus de $t \in B^o$ s'identifie au revêtement double $\eta_t : \tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$ associé au fibré en coniques $\theta_t : X_t \to \mathbb{P}^2$.*

Il n'est pas cependant facile de décrire les dégénérescences des fibres $\eta_t : \tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$.

Remarque 5.4.3. *On peut obtenir une autre forme symplectique sur la variété de Prym relative considérée ici.*

La réalisation d'une partie ouverte dense de la famille des courbes $\tilde{\Delta}_t$ comme la normalisée d'une famille équisingulière avec 12 nœuds de courbes $\Delta_{t,S}$, qui sont des membres singuliers du système linéaire $|4H_2'|_S$ sur la surface K3 S, permet de considérer un système intégrable de frontière ("boundary integrable system") qui y est associé, comme dans les dernières lignes de la section 8 du travail [21]. Les courbes $\Delta_{t,S}$ sont de genre arithmétique 17, donc la jacobienne compactifiée relative de ce système linéaire $k : M = M_S^{H_2'}(0, [4H_2'], -16) \to \mathbb{P}^{17}$ est une famille lagrangienne sur une variété symplectique de dimension 34. Lorsqu'on prend la restriction de k à la strate $\mathcal{S}_{12} \subset \mathbb{P}^{17}$ des courbes avec 12 nœuds, on obtient une famille lisse de jacobiennes généralisées $k_{12} : \mathcal{J}_{12} = J(\mathcal{C}_{12}/\mathcal{S}_{12}) \to \mathcal{S}_{12}$, où $\mathcal{C}_{12}/\mathcal{S}_{12}$ est la famille des membres du système linéaire $|4H_2'|_S$ à 12 nœuds, et $\mathcal{J}_{12} \subset k^{-1}(\mathcal{S}_{12})$ est l'ouvert des jacobiennes généralisées à l'intérieur des jacobiennes compactifiées ; donc k_{12} est un schéma en groupes. On a $\dim(\mathcal{S}_{12}) = 5$, et les jacobiennes généralisées fibres de k_{12} sont des extensions par $\mathbb{G}_m^{12}$ de la variété abélienne de dimension 5 qui est la jacobienne de la normalisée de la courbe à 12 nœuds. L'observation de Donagi–Markman était que dans cette situation, la restriction de la forme symplectique de M à $\mathcal{J}_{12}$ a un noyau de dimension 12, et le feuilletage du noyau de la forme symplectique est en fait tangent aux orbites de $\mathbb{G}_m^{12}$. Donc la forme symplectique descend à une forme symplectique sur la fibration réduite des jacobiennes des normalisées des courbes, paramétrées par $\mathcal{S}_{12}$, de sorte qu'on obtient une fibration lagrangienne à fibres compactes $J(\mathcal{C}_{12}^{\nu}/\mathcal{S}_{12})$, où l'indice supérieur ν indique la normalisée, une famille de courbes de genre 5 sur la base $\mathcal{S}_{12}$ de dimension 5. C'est ce système-ci que Donagi–Markman appellent système intégrable de frontière. Si on note B^* la partie ouvert de B^o paramétrant les courbes Δ_t à 12 tangences simples avec C_S, alors $\mathcal{P}^* := \mathrm{Prym}\,(\tilde{\boldsymbol{\Delta}}/\boldsymbol{\Delta})|_{B^*} \to B^*$ se plonge de façon naturelle dans $J(\mathcal{C}_{12}^{\nu}/\mathcal{S}_{12}) \to \mathcal{S}_{12}$ comme la partie anti-invariante par l'involution de Galois ι du revêtement double, B^* étant la partie de $\mathcal{S}_{12}$ stable par ι.

Donc la famille $\mathcal{P}^* \to B^*$ porte deux structures symplectiques, pour lesquelles elle est lagrangienne, l'une celle des systèmes intégrables des drapeaux K3-Fano, l'autre induite par le système intégrable de frontière à la Donagi–Markman. Il n'est pas clair si elles sont identiques.

Maintenant on considère le lieu des droites doubles :

$$\overline{\boldsymbol{\Delta}}_2 = \{(y,t) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \mid X_{t,y} = \theta_t^{-1}(y) \simeq 2\mathbb{P}^1\},$$

où on a noté par $2\mathbb{P}^1$ une conique plane de rang 1, c'est à dire, une droite double. Comme partout dans cette section, on travaille sous l'hypothèse que les données initiales F, G sont génériques.

Proposition 5.4.4.

(i) Le lieu des droites doubles $\overline{\boldsymbol{\Delta}}_2$ *est une courbe irréductible qui se projette sur le plan* $\mathbb{P}^2$ *aux coordonnées* t *de façon birationnelle. La projection* C_{12} *de* $\overline{\boldsymbol{\Delta}}_2$ *sur ce plan est une courbe irréductible de degré* 12 *n'ayant que* 36 *nœuds comme singularités ; de plus, tous ces nœuds se trouvent hors de la droite* $t_0 = 0$*.*

(ii) Pour $t \in C_{12}$ *générique,* Δ_t *a un seul nœud comme singularité et la variété* X_t *reste lisse. La forme normale locale de l'équation du fibré en coniques* $X_t \to \mathbb{P}^2$ *au voisinage du nœud de* Δ_t *est* $ux_0^2 + vx_1^2 + x_2^2 = 0$*, où* u, v *sont des paramètres locaux analytiques de* $\mathbb{P}^2$ *convenablement choisis, l'équation locale de* Δ_t *étant* $uv = 0$*.*

(iii) Pour $t \in C_{12}$ *générique,* $\tilde{\Delta}_t$ *a également un seul nœud comme singularité, qui est le seul point de ramification du revêtement double* $\eta_t : \tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$*. L'involution de ce revêtement ne permute pas les branches de* $\tilde{\Delta}_t$ *au point singulier, et bien que les jacobiennes généralisées* $J(\tilde{\Delta}_t)$*,* $J(\Delta_t)$ *soient toutes les deux non compactes, la variété de Prym* $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\Delta}_t/\Delta_t)$ *reste une surface abélienne principalement polarisée. La variété de Prym dans cette situation est définie de la même façon que pour un revêtement entre des courbes lisses :* $\mathrm{Prym}\,(\tilde{\Delta}_t/\Delta_t) := \big(\ker[\eta_{t*} : J(\tilde{\Delta}_t) \to J(\Delta_t)]\big)^o$*, où* η_{t*} *désigne le morphisme de la norme entre les groupes des classes de diviseurs et l'indice supérieur* ^{o} *désigne la composante connexe de l'élément neutre du groupe.*

Démonstration.

(i) L'idéal de $\overline{\boldsymbol{\Delta}}_2$ est l'idéal bihomogène en (y, t) engendré par les mineurs de taille 2 du déterminant (5.4.2) de taille 3. On le calcule par l'ordinateur pour un choix aléatoire de F, G, puis on élimine les variables y, ce qui donne un idéal principal engendré par un polynôme ϕ de degré 12, définissant la courbe plane C_{12}. Le calcul de la longueur du schéma défini par l'idéal jacobien de C_{12} donne 36, donc le lieu singulier est formé de 36 nœuds ou de plus petit nombre de points singuliers plus compliqués dont les contributions au schéma jacobien sont > 1. Pour éliminer l'éventualité de présence de points singuliers dégénérés, on démontre d'abord que C_{12} n'a pas de points de multiplicité > 2. L'idéal du lieu des points de multiplicité > 2 peut être engendré par les dérivées partielles de ϕ des ordres 1 et 2. Le calcul de la dimension du schéma défini pas cet idéal donne -1, c'est à dire le schéma des points de multiplicité > 2 est vide. Donc tous les points singuliers sont doubles et il reste à voir que les parties quadratiques de ϕ en ces points ne sont pas de rang 1. On calcule l'idéal engendré par les dérivées partielles du premier ordre de ϕ et par les mineurs de taille 2 de la matrice hessienne de ϕ, et on vérifie que cela donne le schéma vide. L'intersection du lieu nodal avec la droite $t_0 = 0$ est aussi vide.

(ii) Toujours par un calcul à l'ordinateur, on vérifie que Δ_t n'a qu'un nœud comme singularité. Puisqu'on n'a pas de possibilité de trouver explicitement un point t de $\mathbb{P}^2$ solution de $\phi = 0$, on se contente d'un idéal qui donne un nombre fini de telles solutions : on coupe C_{12} par une droite, c'est à dire, on forme l'idéal de l'intersection (ϕ, ψ), où ϕ est, comme ci-dessus, l'équation de C_{12} et ψ est une forme linéaire aléatoire en t. Puis, en rajoutant à cet idéal les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de δ par rapport à y, on vérifie qu'il n'y a pas de points triples, et en remplaçant les dérivées d'ordre 2 par les mineurs de taille 2 de la matrice des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à y, on vérifie qu'il n'y a pas de points doubles dégénérés non plus. Donc au-dessus des 12 points du lieu $\phi = \psi = 0$ du plan des t, les courbes Δ_t n'ont que des nœuds. En calculant l'idéal de l'ensemble des nœuds, on vérifie que sa colongueur est 12, donc chacune des 12 courbes singulières Δ_t a un seul nœud. L'assertion concernant les courbes Δ_t est donc vérifiée.

Rajoutons maintenant à ϕ, ψ les dérivées partielles de F par rapport aux variables x, y. L'idéal obtenu donne le lieu singulier de la réunion des variétés X_t sur les 12 points t de l'intersection $C_{12} \cap \{\psi = 0\}$, et le calcul de sa dimension montre qu'il est vide. [1]

Il reste à réduire la forme quadratique F_t en x_i aux coefficients dépendant de paramètres locaux (u, v) du plan où varient les y, le points $u = v = 0$ étant le nœud de Δ_t ; par un changement analytique local de (u, v), on peut se ramener à la situation où l'équation locale de Δ_t est $uv = 0$. Le coefficient de x_2^2 dans F_t étant non nul, F_t se réduit, par un changement évident du type $x_2 \to a(u,v)x_2 + b(u,v)x_1 + c(u,v)x_0$ $(a(0,0) \neq 0)$, à la forme

$$F_t = x_2^2 + a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_2^2,\ a_{ij} = a_{ij}(u,v),\ a_{ij}(0,0) = 0,\ \det(a_{ij}) = uv.$$

1. En réalité, on fait ce calcul après avoir déshomogénéisé les coordonnées x, y, c'est à dire, on travaille dans les cartes affines $\mathbb{A}^4$ recouvrant $\mathbb{P}$. De cette façon on se débarrasse des solutions parasites $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ ou $y_0 = y_1 = y_2 = 0$.

On a donc à diagonaliser une forme quadratique en deux variables. On commence par normaliser la partie linéaire des a_{ij},

$$a_{ij} \equiv \overline{a}_{ij} = a_{1ij}u + a_{2ij}v \mod \mathfrak{m}^2, \quad \mathfrak{m} = (u, v).$$

Puisque $\det(\overline{a}_{ij}) = uv$, on a $\det(a_{1ij}) = \det(a_{2ij}) = 0$. On peut donc écrire

$$(a_{1ij}) = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}, \ (a_{2ij}) = \begin{pmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Alors $\sum \overline{a}_{ij}x_ix_j = u(ax_0 + bx_1)^2 + v(cx_0 + dx_1)^2$, et le changement $(x_1, x_1) \to (ax_0 + bx_1, cx_0 + dx_1)$ ramène F_t à la forme normale diagonale voulue modulo $\mathfrak{m}^2$. On démontre facilement par récurrence sur k que la diagonalisation peut être prolongée modulo $\mathfrak{m}^k$ pour tous les $k \geq 2$.

(iii) L'assertion sur la structure locale du revêtement $\eta_t : \tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$ suit immédiatement de la forme normale locale du fibré en coniques obtenue dans (ii). Les revêtements doubles entre des courbes nodales avec ce comportement local — les revêtements ramifiés en tous les nœuds et non ramifiés ailleurs, et tels que l'involution du revêtement ne permute pas les branches locales en chaque nœud — ont été étudiés par Beauville, et on les appelle usuellement revêtements satisfaisant à la condition de Beauville, voir la condition (*) en début de la section 3 de [5]. En supposant cette condition vérifiée, Beauville démontre que la variété de Prym généralisée, définie comme dans l'énoncé, est une V.A.P.P (proposition (3.5) dans loc. cit.), ce qui entraîne l'assertion du point (iii). □

La proposition suivante se démontre par des calculs avec Macaulay2.

Proposition 5.4.5.

(i) La famille complète $\overline{\mathbf{\Delta}} = V(\delta) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{P}^2$, $(y, t) \mapsto t$, *est constituée de courbes intègres* Δ_t *(irréductibles et réduites) acquérant au pire des tacnodes comme singularités. Le lieu des* $t \in \mathbb{P}^2$ *où* Δ_t *est singulière, ou en d'autres mots le discriminant de la famille* $\overline{\mathbf{\Delta}}/\mathbb{P}^2$*, est la réunion de trois composantes irréductibles :*

$$C_{\mathrm{discr}} = C_{28} \cup C_{12} \cup L \subset \mathbb{P}^2,$$

où C_{28} *est une courbe intègre de degré* 28*,* C_{12} *est la courbe intègre de degré* 12*, introduite dans la proposition 5.4.4, et* L *est la droite d'équation* $t_0 = 0$.

(iii) On a la description suivante de singularités de C_{discr} *:*
- *Les lieux singuliers de* C_{12} *et de* C_{28} *sont disjoints des intersections de composantes de* C_{discr}.
- *D'après (i) de la proposition 5.4.4, les singularités de* C_{12} *sont constituées de* 36 *nœuds.*
- *Les singularités de* C_{28} *sont constituées de* 276 *nœuds et de* 66 *cusps.*
- C_{12} *et* C_{28} *s'intersectent transversalement en* 204 *points et ont, en plus,* 66 *points de tangence simple.*
- C_{12} *est totalement tangente à* L*, et l'intersection* $C_{12} \cap L$ *est formée de* 6 *points de tangence simple.*
- C_{28} *intersecte* L *transversalement en* 26 *points et a, en plus, un point de tangence simple avec* L.

(iv) On rappelle qu'on a interprété, dans la proposition 5.4.1, la surface $K3$ S *comme le revêtement double de* $\mathbb{P}^2$ *ramifié en la courbe* C_S*. On appelera un point de* C_{discr} *non spécial s'il n'est pas contenu dans le lieu singulier de* C_{discr}*. Les propriétés suivantes concernant les singularités des courbes* Δ_t *sont vérifiées :*
- C_{12} *coïncide avec le lieu des points* t *de* $\mathbb{P}^2$*, pour lesquels la courbe* Δ_t *a un point singulier sur* C_S*. Pour* $t \in C_{12}$ *non spécial,* Δ_t *a un seul point singulier, qui est un nœud situé sur* C_S*, de sorte qu'aucune branche du nœud n'est tangente à* C_S.
- *Pour tout* $t \in C_{28}$ *non spécial,* Δ_t *a un unique nœud, et ce nœud ne se trouve pas sur* C_S.
- *Pour tout* $t \in L$ *non spécial, le lieu singulier de* Δ_t *est formé de deux nœuds non situés sur* C_S.

Démonstration.
La vérifications de ces énoncés par des calculs avec Macaulay2 sont décrites dans [14], voir les sections **Courbes** Δ_t **pour** $t \in V(t_0)$, **Discriminant** Discr D **de la famille de courbes** $DDD \subset \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2) \times \mathbb{P}(la_0, la_1, la_2)$ **et singularités de** Discr D, **Étude des singularités qu'acquièrent les courbes** $DDD(t) \subset \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2)$ **de la famille** $DDD \subset \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2) \times \mathbb{P}(la_0, la_1, la_2)$, **Discriminant** Discr D **de la famille de courbes** $DDD \subset \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2) \times \mathbb{P}(la_0, la_1, la_2)$ **et singularités de** Discr D, **Intersection des courbes de la famille** $DDD \subset$

$\mathbb{P}(y_0, y_1, y_2) \times \mathbb{P}(la_0, la_1, la_2)$ **avec la courbe de ramification** $C_0 = Q_0 \subset \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2)$ **du revêtement double** $S \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2)$ **de la surface K3 S**, **Courbes** Δ_t **pour** $t \in V(t_0)$, **Étude des singularités qu'acquièrent les courbes** $DDD(t) \subset \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2)$ **de la famille** $DDD \subset \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2) \times \mathbb{P}(la_0, la_1, la_2)$, **Étude des singularités qu'acquièrent les courbes** $DDD(t) \subset \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2)$ **de la famille** $DDD \subset \mathbb{P}(y_0, y_1, y_2) \times \mathbb{P}(la_0, la_1, la_2)$ de [14].

Dans loc. cit., on se sert des notations utilisés dans les codes, dont DDD pour $\overline{\boldsymbol{\Delta}}$, (la_0, la_1, la_2) pour (t_1, t_1, t_2), $SDDD$ pour le lieu des singularités de la projection de DDD sur le plan des la_i, $D2$ pour le lieu des droites doubles. $\square$

Il est intéressant de décrire le revêtement double $\eta_t : \tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$ aux points $t \in L$. Ces revêtements ne correspondent plus à des fibrés en coniques, car les fibres X_t correspondantes de $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^2$ sont réductibles. Il se trouve que ces revêtements, pour $t \in L$ générique, restent étales, et que $\tilde{\Delta}_t$ se décompose en deux composantes, bien que non isomorphes à Δ_t, de sorte que le revêtement soit non trivial.

Proposition 5.4.6. *(i) La surface K3 S porte deux pinceaux elliptiques $|H_1'|_S$ et $|4H_2' - H_1'|_S$. Chacune des courbes elliptiques de ces pinceaux se projette de façon birationnelle sur une quartique de $\mathbb{P}^2$, totalement tangente à C_S. Cela donne un pinceau de quartiques planes $\{D_u\}_{u \in \mathbb{P}^1}$, génériquement à deux nœuds, donc de genre géométrique 1, et dépendant de façon quadratique en u, tel que pour $u \in P^1$ générique, $(p|_S)^{-1}(D_u) = C_u' \cup C_u''$, où C_u', C_u'' sont deux courbes elliptiques lisses, isomorphes à la normalisée de D_u, $C_u' \in |H_1'|_S$ et $C_u'' \in |4H_2' - H_1'|_S$. De plus, C_u', C_u'' ont $H_1' \cdot (4H_2' - H_1') = 16$ points d'intersections transverses, dont 12 se situent sur la courbe de ramification $\tilde{C}_S$ au-dessus des points de tangence de D_u avec C_S, et 4 restants se projettent sur deux points de $\mathbb{P}^2$ hors de C_S.*

(ii) Pour un choix convenable du paramètre u de $\mathbb{P}^1$ dans (i), le pinceau quadratique $\{D_u\}_{u \in \mathbb{P}^1}$ s'identifie au pinceau $\{\Delta_t\}_{t \in L}$.

Démonstration.
(i) s'obtient par un calcul facile à partir des équations de S.
(ii) : On montre ce point par un calcul avec l'utilisation de Macaulay2, voir la section **Courbes** Δ_t **pour** $t \in V(t_0)$. $\square$

Les calculs par le logiciel Macaulay2 donnent aussi la proposition suivante :

Proposition 5.4.7. *— Les fibres X_t de la famille $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^2$ ne sont singulières que pour $t \in C_{28} \cup L$.*
— Pour $t \in L$, la variété X_t devient réductible, formée de deux composantes irréductibles.
— Pour $t \in C_{28}$ non spécial, X_t a un unique point double ordinaire comme singularité.
— Si t est un noeud de C_{28}, X_t n'a que deux points doubles ordinaires comme singularités.
— Si t est un cusp de C_{28}, X_t a un seul point singulier, et ce point singulier est de type A_2.

Démonstration. Cette proposition est vérifiée par les calculs dans la section **Discriminant** Discr X **et Étude des singularités qu'acquièrent les variétés de Fano** $X(t) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ **de la famille de diviseurs de type (2,2)** $X = \mathcal{X} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times \mathbb{P}(t)$ de [14]. $\square$

On énonce aussi la description des courbes singulières $\tilde{\Delta}_t$ au-dessus de points de $C_{\text{discr}} = C_{28} \cup C_{12} \cup L$. On rappelle que $B^o = \mathbb{P}^2 \setminus C_{\text{discr}}$ est le lieu des $t \in \mathbb{P}^2$, pour lesquels Δ_t, et par conséquent $\tilde{\Delta}_t$, est lisse. On note par ι l'involution sur $\widetilde{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}$ et sur les fibres individuelles $\tilde{\Delta}_t$, de sorte que $\tilde{\Delta}_t/\iota = \Delta_t$.

Corollaire 5.4.8. *(i) Pour $t \in B^o = \mathbb{P}^2 \setminus C_{\text{discr}}$, la courbe $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t$ est lisse et ι est sans points fixes.*

(ii) Pour tout $t \in L$ non spécial, $\tilde{\Delta}_t = C_t' \cup C_t''$, où C_t', C_t'' sont des courbes elliptiques, qui se coupent transversalement en quatre points s_1', s_1'', s_2', s_2'' ; l'involution ι est sans points fixes et permute les 4 points en paires : $\iota(s_i') = s_i''$, $i = 1, 2$.

(iii) Pour tout $t \in C_{12}$ non spécial, $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t$ a pour singularité un nœud, qui est l'unique point fixe de iota et dont les branches ne sont pas permutées par ι. Si t est un nœud de C_{12}, alors le lieu singulier de $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t$ est formé de deux nœuds, qui sont les seuls points fixes de ι et dont les branches ne sont pas permutées par ι.

(iv) Pour tout $t \in C_{28}$ non spécial, $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t$ a pour singularité 2 nœuds permutés par ι. Si t est un nœud de C_{28}, alors $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t$ a 4 nœuds, permutées par ι en paires. Si t est un cusp de C_{28}, alors $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t$ a deux cusps permutés par ι. Dans tous ces cas, ι est sans points fixes sur $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t$.

On va maintenant étudier la structure de fibres dégénérées de la variété de Prym relative compactifiée. On précise d'abord le sens exact du dernier terme. On a défini dans le corollaire 5.4.2 le revêtement double $\boldsymbol{\eta} : \widetilde{\overline{\boldsymbol{\Delta}}} \to \overline{\boldsymbol{\Delta}}$ de familles de courbes au-dessus de $\mathbb{P}^2$, dont la fibre au-dessus de $t \in B^o \subset \mathbb{P}^2$ s'identifie au revêtement double $\eta_t : \tilde{\Delta}_t \to \Delta_t$. On peut munir $\widetilde{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}$ d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ relativement ample et ι-invariant ; par exemple, le pullback de $O_{\mathbb{P}^2}(1)$ convient, où le $\mathbb{P}^2$ est celui de coordonnées y, c'est à dire, le $\mathbb{P}^2$ dans lequel sont contenues les courbes Δ_t. Alors on peut définir la jacobienne relative compactifiée $\widetilde{\overline{\mathcal{J}}} = \overline{\mathcal{J}}\left(\widetilde{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}/\mathbb{P}^2\right)$ comme l'espace de modules relatif des faisceaux $\mathcal{L}$-semistables de rang 1 et sans torsion sur les fibres $\tilde{\Delta}_t$ de $\widetilde{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}/\mathbb{P}^2$. Cet espace de modules est muni de deux involutions, a priori rationnelles, l'une induite par ι, que l'on note par le même symbole ι, et l'autre, notée υ, induisant la multiplication par -1 sur la jacobienne généralisée relative, c'est à dire sur la partie ouverte $\widetilde{\mathcal{J}}$ de $\widetilde{\overline{\mathcal{J}}}$ qui est le schéma en groupes paramétrant les faisceaux inversibles sur les fibres. On définit alors la variété de Prym compactifiée relative par

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{Prym}}\left(\widetilde{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}/\overline{\boldsymbol{\Delta}}\right) := \left(\mathrm{Fix}\,(\iota \circ \upsilon)\right)^o,$$

où l'indice supérieur ^{o} désigne la composante connexe contenant la section des éléments neutres du schéma en groupes $\widetilde{\mathcal{J}}/\mathbb{P}^2$. On note les fibres au-dessus des points $t \in \mathbb{P}^2$ par $\overline{\mathrm{Prym}}\,(\tilde{\Delta}_t/\Delta_t)$, ou $\overline{\mathrm{Prym}}\,(\tilde{\Delta}_t, \iota)$ ou simplement par $\mathcal{P}_t$.

Proposition 5.4.9. *Les fibres $\mathcal{P}_t$ de la variété de Prym compactifiée vérifient les propriétés suivantes.*

(i) Pour tout $t \in B = \mathbb{P}^2 \setminus \left(C_{28} \cap L\right)$, $\mathcal{P}_t$ est une surface abélienne principalement polarisée, isomorphe à la jacobienne intermédiaire de la variété de Fano X_t.

(ii) Pour tout $t \in L$ non spécial, on a la décomposition en strates $\mathcal{P}_t = P_0 \sqcup P_2$, où $P_0 \to J(C'_t) \simeq J(C''_t)$ est un ouvert de dimension 2, fibré en $\mathbb{C}^*$ au-dessus de la courbe elliptique $J(C'_t)$, et $P_2 = J(C'_t)$ est un fermé de dimension 1 dans l'adhérence de P_0 (voir le corollaire 5.4.8 pour la définition de C'_t, C''_t ; voir aussi la proposition 5.4.6 pour la réalisation de ces courbes elliptiques comme des courbes sur la surface K3 S).

(iii) Pour tout $t \in C_{28}$ non spécial, on a la décomposition en strates $\mathcal{P}_t = P_0 \sqcup P_2$, où P_0 est un ouvert de dimension 2, fibré en $\mathbb{C}^*$ au-dessus de la courbe elliptique $\mathrm{Prym}\,(N(\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t), \iota)$, $N(\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t)$ étant la normalisée de $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t$, et $P_2 = \mathrm{Prym}\,(N(\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t), \iota)$ est un fermé de dimension 1.

Démonstration.
(i) : On a déjà observé l'isomorphisme canonique $J(X_t) = \mathcal{P}_t$ pour $t \in B^o$. D'après la proposition 5.4.7, X_t reste lisse pour $t \in B \setminus B^o = C_{12} \setminus (C_{28} \cup L)$, et donc $J(X_t)$ reste une surface abélienne principalement polarisée. L'isomorphisme $J(X_t) = \mathcal{P}_t$ se prolonge alors aux points de $B \setminus B^o$ par la proposition 2.8 de Beauville [4].
(ii) : Soit $t \in V(t_0) \backslash (V(t_0) \cap (C_{12} \cup C_{28}))$. D'après le point (ii) du corollaire 5.4.8, on a

$$p_S \circ \eta_t : \tilde{\boldsymbol{\Delta}}_t = C'_t \cup C''_t \to \Delta_t \subset \mathbb{P}^2$$

qui est un revêtement étale avec $C'_t \cap C''_t = \{s'_1, s''_1, s'_2, s''_2\}$, $\iota(C'_t) = C''_t$, $\iota(s'_1) = s''_1$, $\iota(s'_2) = s''_2$. De plus les morphismes $p_S \circ \eta_t : C'_t \to \Delta_t$ et $p_S \circ \eta : C''_t \to \Delta_t$ s'identifient à la normalisation de $\Delta_t \subset \mathbb{P}^2$ car C'_t et C''_t sont lisses. Donc $C'_t \xrightarrow{\sim} C''_t \to \Delta_t$ sont isomorphes au-dessus de Δ_t, en particulier les courbes elliptiques C'_t et C''_t sont isomorphes. Notons $n : N(C'_t \cup C''_t) = C'_t \sqcup C''_t \to C'_t \cup C''_t$ la normalisation et

— $n^{-1}(s'_1) = \left\{{s'_1}^{(')}, {s'_1}^{('')}\right\}$, avec ${s'_1}^{(')} \subset C'_t$ et ${s'_1}^{('')} \subset C''_t$.
— $n^{-1}(s''_1) = \left\{{s''_1}^{(')}, {s''_1}^{('')}\right\}$, avec ${s''_1}^{(')} \subset C'_t$ et ${s''_1}^{('')} \subset C''_t$.
— $n^{-1}(s'_2) = \left\{{s'_2}^{(')}, {s'_2}^{('')}\right\}$, avec ${s'_2}^{(')} \subset C'_t$ et ${s'_2}^{('')} \subset C''_t$.
— $n^{-1}(s''_2) = \left\{{s''_2}^{(')}, {s''_2}^{('')}\right\}$, avec ${s''_2}^{(')} \subset C'_t$ et ${s''_2}^{('')} \subset C''_t$.

Considérons le morphisme

$$n^* : \overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t) \to \mathrm{Pic}^{\,0}(N(C'_t \cup C''_t)) = \sqcup_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}^{\,d}(C'_t) \times \mathrm{Pic}^{\,-d}(C''_t),$$

où

$$\overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t) := \overline{J}^0_{H'_2}(\tilde{\mathbf{\Delta}}^{S,N}_t) :=$$

$$\{\mathcal{L} \in \mathrm{Coh}\,(C'_t \cup C''_t), \mathrm{rk}\,(\mathcal{L}) = 1, \text{sans torsion, de degré 0 et semi-stable pour} H'_2\} \subset \mathrm{Quot}_{\,(C'_t \cup C''_t)}(O(r), \chi(\mathcal{L}(m))))$$

est une famille bornée, $r \in \mathbb{Z}$ étant un entier fixé (la condition de semi-stabilité borne la régularité). La condition de semi-stabilité implique que $-2 \leq d \leq 2$. Ainsi

$$n^*(\overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t)) = \sqcup_{-2\leq d\leq 2} \mathrm{Pic}^{\,d}(C'_t) \times \mathrm{Pic}^{\,-d}(C''_t)$$

paramètre une famille bornée de faisceaux cohérents. Par définition, $\overline{\mathrm{Prym}}\,(\tilde{\mathbf{\Delta}}_t, \iota) = \overline{\mathrm{Prym}}\,(C'_t \cup C''_t, \iota) \subset \overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t)$ sont les anti-invariants par l'involution ι. Considérons la première strate $J^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t) \subset \overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t)$ qui est l'ouvert de $\overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t)$ paramétrant les faisceaux inversibles. Alors

$$n^* : J^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t) \to \sqcup_{-2\leq d\leq 2} \mathrm{Pic}^{\,d}(C'_t) \times \mathrm{Pic}^{\,-d}(C''_t)$$

est un fibré en $\mathbb{C}^{*3} = (\mu = [\mu_1, \ldots, \mu_4])$ dont la fibre au-dessus de $(\mathcal{L}'_d, \mathcal{L}''_{-d}) \in \mathrm{Pic}^{\,d}(C'_t) \times \mathrm{Pic}^{\,-d}(C''_t)$ est constituée des faisceaux $\mathcal{L}_\mu$ tels que

$$\mathcal{L}_{\mu|V} = \mathcal{L}'_d \sqcup_{[\mu_1,\ldots,\mu_4]} \mathcal{L}''_{-d} := ((V' \times \mathbb{C}) \sqcup (V'' \times \mathbb{C}))/$$

$$((s_1'^{(')}, e') \sim (s_1'^{('')}, \mu_1 e''), (s_1''^{(')}, e') \sim (s_1''^{('')}, \mu_2 e''), (s_2'^{(')}, e') \sim (s_2'^{('')}, \mu_3 e''), (s_2''^{(')}, e') \sim (s_2''^{('')}, \mu_4 e'')),$$

où $n : V' \sqcup V'' := n^{-1}(V) \to V \subset C'_t \cup C''_t$, $V \subset C'_t \cup C''_t$ étant un ouvert contenant $\{s'_1, s''_1, s'_2, s''_2\}$, $V' \subset C'_t$ un ouvert trivialisant $\mathcal{L}'_d$ via la section e' et $V'' \subset C''_t$ un ouvert trivialisant $\mathcal{L}''_d$ via la section e'. Regardons la composante connexe constituée des faisceaux localement libre anti-invariants par l'involution, $P_0 := J^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t) \cap \overline{\mathrm{Prym}}\,(C'_t \cup C''_t, \iota)$. L'involution $\iota : C'_t \cup C''_t \to C'_t \cup C''_t$ se prolonge en l'involution $\iota^N : N(C'_t \cup C''_t) = C'_t \sqcup C''_t \to N(C'_t \cup C''_t) = C'_t \sqcup C''_t$ avec

— $\iota^N(s_1'^{(')}) = s_1''^{('')}$,
— $\iota^N(s_1''^{(')}) = s_1'^{('')}$,
— $\iota^N(s_2'^{(')}) = s_2''^{('')}$,
— $\iota^N(s_2''^{(')}) = s_2'^{('')}$,

Donc $\iota^*(\mathcal{L}'_d \sqcup_{[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4]} \mathcal{L}''_{-d}) = \mathcal{L}'_d \sqcup_{[\mu_2^{-1},\mu_1^{-1},\mu_4^{-1},\mu_3^{-1}]} \mathcal{L}''_{-d}$.
Par ailleurs, $(\mathcal{L}'_d \sqcup_{[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4]} \mathcal{L}''_{-d})^* = \mathcal{L}'_d \sqcup_{[\mu_1^{-1},\mu_2^{-1},\mu_3^{-1},\mu_4^{-1}]} \mathcal{L}''_{-d}$. Donc

$$\iota^*((\mathcal{L}'_d \sqcup_{[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4]} \mathcal{L}''_{-d})^*) = \mathcal{L}'_d \sqcup_{[\mu_2,\mu_1,\mu_4,\mu_3]} \mathcal{L}''_{-d}.$$

Donc $\iota^*((\mathcal{L}'_d \sqcup_{[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4]} \mathcal{L}''_{-d})^*) = \mathcal{L}'_d \sqcup_{[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4]} \mathcal{L}''_{-d}$

— si et seulement si $\mathcal{L}'_d = {\mathcal{L}''_{-d}}^*$ et $[\mu_2, \mu_1, \mu_4, \mu_3] = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4] \in \mathbb{C}^{3*}$,

— si et seulement si $\mathcal{L}'_d = {\mathcal{L}''_{-d}}^*$ et $(\mu_2, \mu_1, \mu_4, \mu_3) \in \mathbb{C}^{4*}$ et $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{C}^{4*}$ sont proportionnels,

— si et seulement si $\mathcal{L}'_d = {\mathcal{L}''_{-d}}^*$ et $\mu_2(1, \mu_1\mu_2^{-1}, \mu_4\mu_2^{-1}, \mu_3\mu_2^{-1})$ et $\mu_1(1, \mu_2\mu_1^{-1}, 1, \mu_3\mu_1^{-1}, \mu_4\mu_1^{-1})$ sont proportionnels,

— si et seulement si $\mathcal{L}'_d = {\mathcal{L}''_{-d}}^*$ et $\mu_1 = \mu_2(1)$ ou $\mu_1 = -\mu_2(2)$, $\mu_4 = \mu_3(1)$ ou $\mu_4 = -\mu_3(2)$ et $\mu_3 = \mu_4(1)$ ou $\mu_3 = -\mu_4(2)$,

— si et seulement si $\mathcal{L}'_d = {\mathcal{L}''_{-d}}^*$ et $[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4] = [\mu_1, \mu_1, \mu_3, \mu_3]$ ou $[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4] = [\mu_1, -\mu_1, \mu_3, -\mu_3]$. Ensuite, on prend la composante connexe i.e. seulement la première égalité des paramètres.

Donc

$$n^* : P_0 \subset J^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t) \to \mathrm{Pic}^0(C'_t) = J(C'_t) \simeq J(C''_t) = \mathrm{Pic}^0(C''_t) \subset \mathrm{Pic}^0(C'_t) \times \mathrm{Pic}^0(C''_t)$$

est un fibré en $[\mu_1, \mu_3] \in \mathbb{C}^*$. Considérons maintenant les 4 autres strates

$$J_1 \sqcup J_2 \sqcup J_3 \sqcup J_4 = \overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t) \backslash J^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t)$$

dont les faisceaux ne sont pas localement libres et regardons la composante connexe des anti-invariants.

— On voit immédiatement que $\mathcal{L} \in \overline{\mathrm{Prym}}(C'_t \cup C''_t, \iota)$ est inversible en s'_1 si et seulement si il est inversible en s''_1 et qu'il est inversible en s'_2 si et seulement si il est inversible en s''_2. Donc les strates $P_1 = P_3 = \emptyset \subset \overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t)$, qui paramètrent les faisceaux anti-invariants non localement libres en exactement 1 des 4 points $\{s'_1, s''_1, s'_2, s''_2\}$, respectivement en exactement 3 des 4 points $\{s'_1, s''_1, s'_2, s''_2\}$, sont vides.

— On a

$$J_2 = J_2^{(1)} \sqcup J_2^2 \subset \overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t),$$

où $J_2^{(1)} \subset \overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t)$ paramètre les faisceaux non localement libres en exactement $\{s'_2, s''_2\}$ donc localement libres en $\{s'_1, s''_1\}$, et $J_2^{(2)} \subset \overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t)$ paramètre les faisceaux non localement libres en exactement $\{s'_1, s''_1\}$ donc localement libres en $\{s'_2, s''_2\}$. On argumente alors comme précédemment pour obtenir la description de $P_2 := J_2 \cap \overline{\mathrm{Prym}}(C'_t \cup C''_t, \iota)$.

— Pour la dernière strate, $J_4 \subset \overline{J}^0_{H'_2}(C'_t \cup C''_t)$ paramètre les faisceaux non localement libres en tous les 4 points $\{s'_1, s''_1, s'_2, s''_2\}$ donc paramètre les extensions triviales. Donc $J_4 = \mathrm{Pic}^{-2}(C'_t) \times \mathrm{Pic}^{-2}(C''_t)$. Puisque $\mathrm{Pic}^d(C'_t) \simeq \mathrm{Pic}^d(C''_t)$, $P_4 := J_4 \cap \overline{\mathrm{Prym}}(C'_t \cup C''_t, \iota) = \mathrm{Pic}(C'_t) = J(C'_t) \simeq J(C''_t)$.

(iii) : Soit $t \in C_{28} \backslash (\mathrm{sing}\, C_{28} \cup (C_{28} \cap (C_{12} \cup V(t_0))))$. D'après le point (iv) du corollaire 5.4.8, $\mathrm{sing}\, \Delta_t = \{s\} \subset \mathbb{P}^2$, où s est un noeud,

$$p_S \circ \eta_t : \tilde{\mathbf{\Delta}}_t = F_1(X_t/\mathbb{P}^2) \to \Delta_t \subset \mathbb{P}^2$$

est un revêtement étale et $\mathrm{sing}\, \tilde{\mathbf{\Delta}}_t = \{s', s''\}$, où s' et s'' sont 2 noeuds tel que $\iota(s') = s''$. La démonstration est alors similaire à celle de [44, proposition 4.3(iii)].

□

Remarque 5.4.10. *D'après le corollaire 5.4.9, il n'y a qu'un nombre fini de fibres $P_t \subset \overline{\mathrm{Prym}}(\tilde{\mathbf{\Delta}}, \iota) \to \mathbb{P}^2(t)$ dont la caractéristique d'Euler $\chi(P_t, \mathbb{Z}) \neq 0$ est non nulle. Si on pouvait décrire les décompositions en strates de toutes les fibres P_t, on en pourrait déduire la caractéristique d'Euler de $\mathcal{P}$. Or pour le moment on n'a pas de description des fibres P_t pour t appartenant aux intersections des composantes de C_{disc}.*

Chapitre 6

Appendice
Récapitulatif des variétés de Fano de dimension 3

Notations : $H_{N-1} \subset \mathbb{P}^N$ désigne un hyperplan.
X_d désigne une variété de Fano de la série principale de degré d.
Les points d'interrogation désignent des questions encore non résolues.

TABLE 6.1: Variétés de Fano de nombre de Picard 1 et d'indice 1

No.	r	$(K_X^{-1})^3$	g	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface $K3$**	$F_g^S =$	**Compactification**
1	1	2	2	52	$X = X_2 \to \mathbb{P}^3$ est un revêtement double ramifié en un diviseur de degré 6	S est revêtement double de $S_0 \subset \mathbb{P}^3$	$B \subset [\mathbb{P}^{56}/\mathbb{G}_a^3 \rtimes \mathbb{G}_m]$ est un ouvert	?
2	1	4	3	30	$X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ est une quartique, ou $X \to Q \subset \mathbb{P}^4$ est revêtement double d'une quadrique lisse ramifié en un diviseur de degré 8.	$S = X_4 \cap H_3 \subset \mathbb{P}^4$ est une quartique $K3$, $S \in K_4$.	B/G_4, où $B \subset [\mathbb{P}^{35}/\mathbb{G}_a^4 \rtimes \mathbb{G}_m]$ est un ouvert	?
3	1	6	4	20	$X = X_6 \subset \mathbb{P}^5$ est une intersection complète d'une quadrique et d'une cubique.	$S = X_6 \cap H_4 \subset \mathbb{P}^5$, $S \in K_6$.	B/G_5, $B \subset [\mathbb{P}^{21} \times \mathbb{P}^6/\mathbb{G}_a \times (\mathbb{G}_a^5 \rtimes \mathbb{G}_m)]$ est un ouvert.	?
4	1	8	5	14	$X = X_8 \subset \mathbb{P}^6$ est une intersection complète de trois quadriques.	$S = X_8 \cap H_5 \subset \mathbb{P}^6$, $S \in K_8$.	B/G_6, $B \subset [\mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7/\mathbb{G}_a^6 \rtimes \mathbb{G}_m]$ est un ouvert.	?
5	1	10	6	10	$X = X_{10} \subset \mathbb{P}^7$ est une section de $\mathrm{Gr}(2,5)$ plongée par Plücher par un sous-espace linéaire de codim 2 et une quadrique, ou une section d'un cône $W = W_5 \subset \mathbb{P}^7$ au dessus d'une variété de del Pezzo (de dim 3) $V = V_5 \subset \mathbb{P}^6$ de deg 5 par une quadrique.	$S = H_6 \cap X_{10} \subset \mathbb{P}^7$, $S \in K_{10}$.	$B \subset [\mathbb{A}^{10} \times \mathrm{GL}(3)/\mathbb{G}_a^2 \rtimes \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}]$ est un ouvert	?
6	1	12	7	7	$X = X_{12} \subset \mathbb{P}^8$.	$S = H_7 \cap X_{12} \subset \mathbb{P}^8$, $S \in K_{12}$.	$B \subset \mathbb{P}^7$ un ouvert	?
7	1	14	8	5	$X = X_{14} \subset \mathbb{P}^9$ est une section de $\mathrm{Gr}(2,6)$ plongée par Plücher par un sous-espace de codim 5.	$S = H_8 \cap X_{14} \subset \mathbb{P}^9$, $S \in K_{14}$.	$B \subset \mathbb{P}^5$ est un ouvert	?
8	1	16	9	3	$X = X_{16} \subset \mathbb{P}^{10}$.	$S = H_9 \cap X_{16} \subset \mathbb{P}^{10}$, $S \in K_{16}$	$B \subset \mathbb{P}^3$ est un ouvert	?
9	1	18	10	2	$X = X_{18} \subset \mathbb{P}^{11}$.	$S = H_{10} \cap X_{18} \subset \mathbb{P}^{11}$, $S \in K_{18}$.	$B \subset \mathbb{P}^2$ est un ouvert	?
10	1	22	12	0	$X = X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$

TABLE 6.2: Variétés de Fano de nombre de Picard 1 et d'indice 2

No.	r	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
11	2	$8 \cdot 1$	21	$V = V_1$ est un revêtement double de l'éclaté $\mathbb{P}(2,\tilde{1},1,1)_v$, v étant le sommet, ramifié en un diviseur lisse $R_0 \in \lvert O_{\mathbb{P}(2,1,1,1)}(6)\rvert$ ne passant pas par v	$S = V_1 \cap Q \subset \mathbb{P}(3,2,1,1,1)$, où $Q \in \lvert O_{\mathbb{P}(2,1,1,1)}(2)\rvert$	$B \subset \mathbb{P}^{21}$ un ouvert	?
12	2	$8 \cdot 2$	10	$V = V_2$ est un revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié en une surface lisse $R_0 \subset \mathbb{P}^3$ de degré 4.	$S = V_2 \cap H \subset \mathbb{P}^{10}$, $H \subset \mathbb{P}^{10}$ étant un hyperplan	$B \subset [\mathbb{P}^{11}/\mathbb{G}_m]$ est un ouvert	?
13	2	$8 \cdot 3$	5	$V = V_3 \subset \mathbb{P}^4$, une cubique lisse.	$S = V_3 \cap Q \subset \mathbb{P}^4$	$B \subset \mathbb{P}^5$ un ouvert.	?
14	2	$8 \cdot 4$	2	$V = V_4 \subset \mathbb{P}^5$, une intersection lisse de deux quadriques.	$S = V_4 \cap Q \subset \mathbb{P}^5$	$B \subset \mathbb{P}^{2*}$ est un ouvert	$M_{\hat{S}}(0,\hat{h},-1) \to \mathbb{P}^2$, $\hat{S} \to \mathbb{P}^2$ revêtement double ramifié en une sextique lisse.
15	2	$8 \cdot 5$	0	$V = V_5 \subset \mathbb{P}^6$, une section de $\mathrm{Gr}\,(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ par un sous-espace de codim 3.	sans intérêt.	sans intérêt.	$J(V) = 0$
16	3	$27 \cdot 2$	0	$Q \subset \mathbb{P}^4$, une quadrique lisse.	sans intérêt	sans intérêt	$J(Q) = 0$
17	4	64	0	$\mathbb{P}^3$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(\mathbb{P}^3) = 0$

TABLE 6.3: Variétés de Fano de nombre de Picard 2

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
1	4	22	l'éclaté de V_1 en une courbe elliptique, qui est une intersection de deux diviseurs du système linéaire $\lvert -\frac{1}{2}K_{V_1}\rvert$.	Transformé strict de $S_0 \subset V_1$ contenant deux pinceaux elliptiques.	$B \subset (\mathbb{P}^{21} \times \mathbb{P}^1) \sqcup (\mathbb{P}^{21} \times \mathbb{P}^1)$ est un ouvert.	$(M_{S_0}(0,[C],0) \sqcup M_{S_0}(0,[C'],0)) \times \overline{\mathcal{J}}_{1,S_0} \to (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{21}) \sqcup (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{21})$.
2	6	20	le revêtement double $X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ ramifié en un diviseur R_0 de bidegré $(2,4)$.	$S = X \cap T_{1,1} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^2$ étant un fibré projectif de rang 2 et $T_{1,1} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ un diviseur de type $(1,1)$. On a $S \in K_6^R$, où $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^{20}$ est un ouvert.	?
3	8	11	l'éclaté de V_2 en une courbe elliptique, qui est une intersection de deux diviseurs du système linéaire $\lvert -\frac{1}{2}K_{V_2}\rvert$.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict de $S_0 = V_2 \cap H \subset \mathbb{P}^{10}$ (Tableau 6.2 No. 12) contenant un pinceau elliptique. On a $S \in K_4^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset (\mathbb{P}^1 \times [\mathbb{P}^{11}/\mathbb{G}_m]) \sqcup (\mathbb{P}^1 \times [\mathbb{P}^{11}/\mathbb{G}_m])$ est un ouvert.	$(M_{S_1}(0,[C],0) \sqcup M_{S_1}(0,[C'],0)) \times \overline{\mathcal{J}}_{2,S_1} \to (\mathbb{P}^1 \times [\mathbb{P}^{11}/\mathbb{G}_m]) \sqcup (\mathbb{P}^{11} \times [\mathbb{P}^{11}/\mathbb{G}_m])$.
4	10	10	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une intersection $C = V(f'_3, f''_3) \subset \mathbb{P}^3$ de deux cubiques.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict de $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ quartique $K3$ contenant une intersection complète $C = V(f'_3, f''_3) \subset \mathbb{P}^3$ de deux cubiques, $S \in K_4^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^{10}$ un ouvert	$M_{S_0}(0,[C],-2) \to \mathbb{P}^{10} = \lvert C\rvert_{S_0}$

TABLE 6.4: Variétés de Fano de nombre de Picard 2

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
5	12	6	l'éclaté de $V_3 \subset \mathbb{P}^3$ en une cubique plane.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict de $S_0 = V_3 \cap Q \subset \mathbb{P}^4$ d'une intersection complète lisse d'une cubique et d'une quartique contenant une cubique plane $C = \Lambda_2 \cap V_3 \subset \mathbb{P}^4$ qui est une section linéaire de V_3, $S \in K_6^R$, où $R = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset (\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^1) \sqcup (\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^1)$, un ouvert	$(M_{S_0}(0,[C],-2) \sqcup M_{S_0}(0,2H - [C],-2)) \times \overline{\mathcal{J}}_{3,S_0} \to (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{10}) \sqcup (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{10})$
6	12	9	1) un diviseur de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ de bidegré $(2,2)$, 2) un revêtement double de $X \to W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ ramifié en un diviseur $B \in \|-K_W\|$.	1) Dégénérescence de 2). 2) $S = X \cap T_{1,1,1} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ où $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ est un fibré projectif de rang 1, $T_{1,1,1} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ étant un diviseur de type $(1,1,1)$. On a $S \in K^R$, où $R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1 \times [\mathbb{P}^{20} / \operatorname{Aut}_S(\mathbb{P}(\mathcal{E}))]$ un ouvert, $\operatorname{Aut}_S(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ le groupe d'automorphisme de ce fibré projectif fixant S point par point.	?
7	14	5	l'éclaté de Q en une intersection complète lisse $C = V(q,q_1,q_2) \subset \mathbb{P}^4$ de Q et de deux quadriques Q_1 et Q_2.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict d'une intersection complète lisse $S_0 = V(f_3,q) \subset \mathbb{P}^4$ d'une cubique et d'une quadrique contenant une intersection complète lisse $C = V(q,q_1,q_2) \subset \mathbb{P}^4$ de Q avec deux autres quadriques, $S \in K_6^R$, où $R = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^5 = \|C\|_{S_0}$ est un ouvert.	$M_{S_0}(0,[C],-2) \to \mathbb{P}^5$.
8	14	9	un revêtement double de V_7 (Tableau 6.2 No. 16) ramifié en un diviseur $R_1 \in \|-K_{V_7}\|$ tel que 1) la courbe $R \cap E_1$ est lisse, 2) la courbe $R \cap E_1$ est réduite et non lisse, avec E_1 le diviseur exceptionnel de l'éclaté $V_7 \to \mathbb{P}^3$.	1) $S = X \cap T \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ où $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to V_7$ est un fibré projectif de rang 1 et $T \in \|O(1) \otimes O_{V_7}(2H - E_1)\|_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ est un diviseur . On a $S \in K^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. 2) Dégénérescence du 1)	$B \subset \mathbb{P}^9$ est un ouvert.	?

TABLE 6.5: Variétés de Fano de nombre de Picard 2

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
9	16	5	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une courbe de degré 7 et de genre 5 qui est une intersection de cubiques.	$S \overset{\sim}{\to} S_0$ est le transformé strict d'une quartique $K3$ $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant une courbe $C \subset \mathbb{P}^3$ de degré 7 et de genre 5, $S \in K_4^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^5$ est un ouvert.	$M_{S_0}(0, [C], -2) \to \mathbb{P}^5$.
10	16	3	l'éclaté de $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ en une courbe elliptique qui est une intersection de deux sections hyperplanes.	$S \overset{\sim}{\to} S_0$ est le transformé strict d'une intersection complète lisse $S_0 = V(q, q', q'') \subset \mathbb{P}^5$ de trois quadriques, contenant un courbe elliptique $C = Q' \cap Q'' \cap \Lambda_3 \subset P^5$, $S \in K_8^R$, où $R = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset (\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) \sqcup (\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1)$, un ouvert	$(M_{S_0}(0, [C], -2) \sqcup M_{S_0}(0, H - [C], -2)) \times \overline{\mathcal{J}}_{4,S_0} \to (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) \sqcup (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2)$
11	18	5	l'éclaté de V_3 en une droite.	$S \overset{\sim}{\to} S_0$ est le transformé strict de $S_0 = V_3 \cap Q \subset \mathbb{P}^4$ d'une intersection complète lisse d'une cubique et d'une quartique contenant une droite $l \subset \mathbb{P}^4$, $S \in K_6^R$, où $R = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^5$ un ouvert.	$\overline{\mathcal{J}}_{3,S_0} \to \mathbb{P}^5$
12	20	3	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une courbe de degré 6 et de genre 3 qui est une intersection de cubiques.	$S \overset{\sim}{\to} S_0$ est le transformé strict d'une quartique $K3$ $S_0 = V(f_4) \subset P^3$ contenant une courbe $C \subset \mathbb{P}^3$ de degré 6 et de genre 3, $S \in K_4^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^3$ est un ouvert.	$M_{S_0}(0, [C], -2) \to \mathbb{P}^3$.
13	20	2	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une courbe de degré 6 et de genre 2.	$S \overset{\sim}{\to} S_0$ est le transformé strict d'une intersection complète lisse $S_0 = V(f_3, q) \subset \mathbb{P}^4$ d'une cubique et d'une quadrique contenant une courbe $C = V(q, q_1, q_2, q_3) \subset \mathbb{P}^4$ de degré 6 et de genre 2, $S \in K_6^R$, où $R = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^2 \sqcup \mathbb{P}^2$ un ouvert.	$M_{S_0}(0, [C], -2) \sqcup M_{S_0}(0, 2H - [C], -2) \to \mathbb{P}^2 \sqcup \mathbb{P}^2$

TABLE 6.6: Variétés de Fano de nombre de Picard 2

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
14	20	1	l'éclaté de $V_5 = \mathrm{Gr}\,(2,5) \cap \Lambda_6 \subset \mathbb{P}^9$ en une courbe qui une intersection de deux sections hyperplanes.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict d'une intersection complète lisse $S_0 = Q \cap \mathrm{Gr}\,(2,5) \cap \Lambda_6 \subset \mathbb{P}^9$ contenant une courbe elliptique $C = \Lambda_4 \cap V_5 \subset \Lambda_6$ de degré 5, $S \in K_{10}^R$, où $R = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$ un ouvert.	$M_{S_0}(0,[C],-2) \sqcup M_{S_0}(0,2H-[C],-2) \to \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$
15	22	4	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en l'intersection d'une quadrique A et d'une cubique B tel que : 1) A est lisse 2) A est réduite mais pas lisse.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict d'une quartique $K3$ $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant une intersection complète lisse d'une quadrique et d'une cubique $C = V(q, f_3) \subset \mathbb{P}^3$, $S \in K_4^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^4 = \|C\|_{S_0}$ un ouvert.	$M_{S_0}(0,[C],-2) \to \mathbb{P}^4$
16	22	2	l'éclaté de $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ en une conique.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict d'une intersection complète lisse $S_0 = V(q,q',q'') \subset \mathbb{P}^5$ de trois quadriques contenant une conique $C \subset \mathbb{P}^5$, $S \in K_8^R$, où $R = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^2$ un ouvert.	$\overline{\mathcal{J}}_{4,S_0} \to \mathbb{P}^2$
17	24	1	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une courbe elliptique de degré 5.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict d'une intersection complète lisse $S_0 = Q \cap V(f_3) \subset \mathbb{P}^4$ contenant une courbe elliptique $C = \Lambda_4 \cap V_5 \subset \Lambda_4 = \mathbb{P}^4$ de deg 5, $S \in K_6^R$, où $R = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$ un ouvert.	$M_{S_0}(0,[C],-2) \sqcup M_{S_0}(0,2H-[C],-2) \to \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$
18	24	2	un revêtement double $X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ ramifié en un diviseur R_0 de bidegré $(2,2)$.	$S = X \cap T_{1,2} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$, où $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^2$ est un fibré projectif de rang 2 et $T_{1,2} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ un diviseur de type $(1,2)$. On a $S \in K_{10}^R$, où $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^2$ est un ouvert.	?

TABLE 6.7: Variétés de Fano de nombre de Picard 2

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
19	26	2	l'éclaté de $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ en une droite.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict d'une intersection complète lisse $S_0 = V(q,q',q'') \subset \mathbb{P}^5$ de trois quadriques contenant une droite $l \subset \mathbb{P}^5$, $S \in K_8^R$, où $R = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^2$ un ouvert.	$\overline{\mathcal{J}}_{4,S_0} \to \mathbb{P}^2$
20	26	0	l'éclaté de $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ en une cubique tordue.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
21	28	0	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une quadrique tordue.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
22	30	0	l'éclaté de $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ en une conique.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
23	30	1	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une intersection de deux diviseurs $A \in \lvert\mathcal{O}_Q(1)\rvert$ et $B \in \lvert\mathcal{O}_Q(2)\rvert$, tel que 1) A est lisse, 2) A est singulière.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict d'une intersection complète lisse $S_0 = V(f_3,q) \subset \mathbb{P}^4$ d'une cubique et d'une quadrique contenant une courbe elliptique $C = V(q,q',h) \subset \mathbb{P}^4$, $S \in K_6^R$, où $R = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1 = \lvert C\rvert_{S_0}$ un ouvert.	$M_{S_0}(0,[C],-2) \to \mathbb{P}^1$
24	30	0	un diviseur sur $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$de bideg $(1,2)$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
25	32	1	l'éclaté de $\subset \mathbb{P}^3$ en une courbe elliptique qui une intersection de deux quadriques.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict d'une quartique $K3$ $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant une intersection complète lisse de deux quadriques $C = V(q_1,q_2) \subset \mathbb{P}^3$, $S \in K_4^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$ un ouvert.	$M_{S_0}(0,[C],-2) \sqcup M_{S_0}(0,2H-[C]) \to \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$
26	34	0	l'éclaté de $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ en une droite.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
27	38	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une cubique tordue.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$

TABLE 6.8: Variétés de Fano de nombre de Picard 2

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
28	40	1	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une cubique plane.	$S \overset{\sim}{\to} S_0$ est le transformé strict d'une quartique $K3$ $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant une cubique plane lisse $C = V(f_3, h) \subset \mathbb{P}^3$, $S \in K_4^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1$ un ouvert.	$M_{S_0}(0, [C], -2) \to \mathbb{P}^1$
29	40	0	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une conique.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
30	46	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une conique.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
31	46	0	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une droite.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
32	48	0	l'éclaté de W, qui est, un diviseur de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ de bidegré $(1,1)$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
33	54	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une droite.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
34	54	0	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
35	56	0	$V_7 = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1))$ sur $\mathbb{P}^2$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
36	62	0	$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2))$ sur $\mathbb{P}^2$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$

TABLE 6.9: Variétés de Fano de nombre de Picard 3

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
1	12	8	un revêtement double $X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ramifié en un diviseur R_0 de tridegré $(2,2,2)$.	$S = X \cap T_{1,1,1}\mathbb{P}(\mathcal{E})$ où $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est un fibré projectif de de rang 2 et $T_{1,1,1} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ est un diviseur de type $(1,1,1)$. On a $S \in K_{12}^R$, où $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset [\mathbb{P}^9/\mathbb{G}_m]$ est un ouvert.	?
2	14	3	un diviseur X de $\lvert L^{\otimes 2} \otimes \mathcal{O}(2,3)\rvert$ sur le fibré en $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1,-1)^{\oplus 2}) = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, tel que $X \cap Y$ est irréductible avec L le fibré en droite tautologique et $Y \in \lvert L\rvert$.	$S = X \cap T_s \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ où $T_s \in \lvert l + 2h_1 + h_2\rvert_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$, $S \in K^R$, où $R = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 9 & 0 & 2 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \lvert X - T_s\rvert_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} = \mathbb{P}^3$ est un ouvert.	?
3	18	3	un diviseur X de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de tridegré $(1,1,2)$.	$S = X \cap Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, où Z est un diviseur de tridegré $(1,1,1)$, $S \in K_{18}^R$, où $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \lvert I_S \otimes \mathcal{O}(1,1,2)\rvert = \mathbb{P}^3$ est un ouvert.	$M_S(0,[\Delta_t'],0) \sqcup M_S(0,[\Delta_t''],0) \to \mathbb{P}^3 \sqcup \mathbb{P}^3$.
4	18	2	l'éclaté du revêtement double $Y \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ ramifié en un diviseur R_0 de bidegré $(2,2)$, en une fibre lisse du composée $Y \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ du revêtement double avec la projection.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict de $S_0 = Y \cap T_{1,2} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ contenant une fibre Y_y, $S \in K_{10}^R$, où $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^2$ est un ouvert.	$\overline{\mathcal{J}}_{S_1,18} \to \mathbb{P}^2$.
5	20	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ en une courbe C de bidegré $(5,2)$ tel que la composée $C \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ est un plongement.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
6	22	1	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une union disjointe d'une droite et d'une courbe elliptique de degré 4.	$S \xrightarrow{\sim} S_1 \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict d'une quartique $K3$ $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$ contenant une courbe $C = V(q_1,q_2) \subset \mathbb{P}^3$ et une droite l, $S \in K_4^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1$ un ouvert.	$M_{S_0}(0,[C],-2) \to \mathbb{P}^1 = \lvert C\rvert_{S_0}$

TABLE 6.10: Variétés de Fano de nombre de Picard 3

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
7	24	1	l'éclaté de W en une courbe elliptique qui est une intersection de deux diviseurs de $\lvert -\frac{1}{2}K_W\rvert$.	$S \xrightarrow{\sim} S_0$ est le transformé strict $K3$ $S_0 = V(q_{22}, h_{11}) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ contenant une courbe elliptique $C = V(h_{11}, l'_{11}, l''_{11}) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, $S \in K_{12}^R$, où $R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$ un ouvert.	$M_{S_0}(0, [C], -2) \sqcup M_{S_0}(0, [C], -2) \to \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$
8	24	0	un diviseur de $\lvert p_1^* g^* \mathcal{O}(1) \otimes p_2^* \mathcal{O}(2)\rvert$ sur $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{P}^2$, avec $p_i,\ i = 1,2$ la projection du i-ème facteur, et $g : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ est l'éclaté.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
9	26	3	l'éclaté d'un cône $V = \mathbb{P}(1,1,1,2) \subset \mathbb{P}^6$ sur une surface de Veronese $R_4 \subset \mathbb{P}^2$ avec le centre dans une union disjointe d'un sommet v et une quadrique sur $R_4 \simeq \mathbb{P}^2$	$S \xrightarrow{\sim} S_1 \to S_0$ est le transformé strict d'un diviseur $S_0 = V(s_0) \subset V$ d'une section globale s_0 du faisceau cohérent $O_V(5)$ ayant comme seule singularité v, contenant une quartique lisse $C \subset V$, $S \in K^R$, où $R = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^3 = \lvert C\rvert_{S_1}$ est un ouvert.	$M_{S_1}(0, [C], -2) \to \mathbb{P}^3$.
10	26	0	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une union disjointe de deux coniques.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
11	28	1	l'éclaté de V_7 en une courbe elliptique qui une intersection de deux diviseurs de $\lvert -\frac{1}{2}K_{V_7}\rvert$.	$S \xrightarrow{\sim} S_1 \to S_0$ est le transformé strict d'une quartique $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$, singulière en x, contenant une courbe $C = V(q_1, q_2) \subset \mathbb{P}^3$ et le point x, $S \in K^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$ un ouvert.	$M_{S_1}(0, [C], -2) \sqcup M_{S_1}(0, 2H - [C] - [E_1], -2) \to \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$
12	28	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une union disjointe d'une droite et d'une cubique tordue.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
13	30	0	l'éclaté de $W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ en une courbe C de bidegré $(2,2)$ tel que la composée $C \hookrightarrow W \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \xrightarrow{p_i} \mathbb{P}^2$ est un plongement pour chaque projection $p_i,\ i = 1,2$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$

TABLE 6.11: Variétés de Fano de nombre de Picard 3

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
14	32	1	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une union d'une courbe cubique se situant dans un plan S et d'un point non contenu dans S.	$S \overset{\sim}{\to} S_1 \to S_0$ est le transformé strict d'une quartique $S_0 = V(f_4) \subset \mathbb{P}^3$, singulière en x, contenant une cubique plane lisse $C = V(f_3, h) \subset \mathbb{P}^3$ et le point x, $S \in K^R$, où $R = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1 = \|C\|_{S_1}$ un ouvert.	$M_{S_1}(0, [C], -2) \to \mathbb{P}^1$
15	32	0	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une union disjointe d'une droite et d'une conique.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
16	34	0	l'éclaté de V_7 en la transformée stricte (sous $V_7 \to \mathbb{P}^3$) d'une courbe cubique tordue passant par le centre de l'éclatement.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
17	36	0	un diviseur sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ de tridegré $(1,1,1)$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
18	36	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une union disjointe d'une droite et d'une conique.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
19	38	0	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en deux points non colinéaire.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
20	38	0	l'éclaté de $Q \subset \mathbb{P}^4$ en une union de deux droites.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
21	38	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ en une courbe de bidegré $(2,1)$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
22	40	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ en une conique sur $t \times \mathbb{P}^2$, $t \in \mathbb{P}^1$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
23	42	0	l'éclaté de V_7 en une conique passant par le centre de l'éclaté $V_7 \to \mathbb{P}^3$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
24	42	0	$W \times_{\mathbb{P}^2} \mathbb{F}_1$, où $W \to \mathbb{P}^2$ est un $\mathbb{P}^1$-fibré et $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ est l'éclaté.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
25	44	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une union disjointe de deux droites ou alors $\mathbb{P}(\mathcal{O}(1,0) \oplus \mathcal{O}(0,1))$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}1$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$

TABLE 6.12: Variétés de Fano de nombre de Picard 3

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
26	46	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ avec centre en une union disjointe d'un point et d'une droite	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
27	48	0	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
28	48	0	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_1$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
29	50	0	l'éclate de V_7 en un droite contenue dans le diviseur exceptionnel de l'éclaté $V_7 \to \mathbb{P}^3$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
30	50	0	l'éclaté de V_7 en la transformée stricte d'une droite passant pas le centre de l'éclate $V_7 \to \mathbb{P}3$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
31	52	0	l'éclaté d'un cône sur une quadrique dans $\mathbb{P}^3$ à un sommet, ou de même $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1,1))$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}1$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$

TABLE 6.13: Variétés de Fano de nombre de Picard 4

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
1	24	1	diviseur $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de multidegré (1,1,1,1).	$S = X_0 \cap X_1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $S \in K_{24}^R$, où $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \lvert I_S \otimes \mathcal{O}(1,1,1,1)\rvert = \mathbb{P}^1$ est un ouvert.	$M_S(0,[\Delta'_t],0) \sqcup M_S(0,[\Delta''_t],0) \to \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$.
2	28	1	l'éclaté du cône $V = V(q_V) \subset \mathbb{P}^4$, de sommet v, au dessus d'une quadrique lisse $R \subset \mathbb{P}^3$ en une union disjointe du sommet et d'une courbe elliptique $C = \Lambda_3 \cap V \cap Q \subset \mathbb{P}^4$	$S \xrightarrow{\sim} S_1 \to S_0 \subset V(f_3, q_V) \subset \mathbb{P}^4$, S_0 contient le sommet v et une courbe elliptique $C = \Lambda_3 \cap V \cap Q \subset \mathbb{P}^4$, $S \in K_{24}^R$, où $R = \begin{pmatrix} 2 \text{ ou } -1 & -1 \text{ ou } 2 & 1 & 4 \\ -1 \text{ ou } 2 & 2 \text{ ou } -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.	$B \subset \mathbb{P}^1 = \lvert C\rvert_{S_1}$ est un ouvert.	$M_{S_1}(0,[C],-2) \to \mathbb{P}^1$.
3	30	0	l'éclaté $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en une courbe de tridegré $(1,1,2)$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
4	32	0	l'éclate de Y (No. 19, Tableau 6.11) en une transformée stricte d'une conique sur Q passant par $p \cdot q$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
5	32	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ en une union disjointe de deux courbes de bidegré $(2,1)$ et $(1,0)$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
6	34	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^3$ en une union disjointe de trois droites ou, qui est le même éclaté de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en une courbe tridiagonale.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
7	36	0	l'éclaté de $W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ en une union disjointe de deux courbes de bidegré $(0,1)$ et $(1,0)$	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
8	38	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en une courbe de tridegré $(0,1,1)$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$

TABLE 6.14: Variétés de Fano de nombre de Picard 4

No.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface** $K3$	F_g^S	**Compactification**
9	40	0	l'éclaté de Y (No. 25 6.11) en une courbe exceptionnelle de l'éclaté $Y \to \mathbb{P}^3$	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
10	42	0	$\mathbb{P}^1 \times S_7$	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
11	44	0	l'éclaté de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_1$ en $t \times e$, avec $t \in \mathbb{P}^1$ et e est une (-1)-courbe sur $\mathbb{F}_1$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
12	46	0	l'éclaté de Y (No. 33, Tableau 6.5) en deux droites exceptionnelles de l'éclaté $Y \to \mathbb{P}^3$	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$

TABLE 6.15: Variétés de Fano de nombre de Picard ≥ 5

No.	Pic.	$(K_X^{-1})^3$	$h^{1,2}$	**Description**	**Surface $K3$**	F_g^S	**Compactification**
1	1	28	0	l'éclaté de Y (No. 29, Tableau 6.5) en trois droites exceptionnelles de l'éclaté $Y \to Q$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
2	2	36	1	l'éclaté Y (No. 25, Tableau 6.11) en deux droites exceptionnelles ℓ et ℓ' de l'éclaté $\phi : Y \to \mathbb{P}^3$ tel que ℓ et ℓ' contenues dans la même composante irréductible du lieu exceptionnel de ϕ.			
3	3	36	0	$\mathbb{P}^1 \times S_6$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
4	4	30	0	$\mathbb{P}^1 \times S_5$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
5	5	24	0	$\mathbb{P}^1 \times S_4$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
6	6	18	0	$\mathbb{P}^1 \times S_3$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
7	7	12	0	$\mathbb{P}^1 \times S_2$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$
8	8	6	0	$\mathbb{P}^1 \times S_1$.	sans intérêt	sans intérêt	$J(X) = 0$

Bibliographie

[1] P.Luis del Angel and S.Müller-Stach, *Motives of uniruled threefolds, Compositio Math. 112(1998), 1-16.*

[2] P.Luis del Angel and S.Müller-Stach, *On Chow motives of threefolds, Trans. Am. Math. Soc. 352(2000), 1623-1633.*

[3] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, Compact Complex Surfaces. Erg. Math., 3. Folge, Band 4, Springer Verlag, Berlin (1984).

[4] A. Beauville, *Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.(4) 10 (1977), 309–391.

[5] A. Beauville, *Prym Varieties and the Schottky Problem*, Inventiones math. **41**(1977), 149–196.

[6] A.Beauville, *Fano threefolds and K3 surfaces*, Proceedings of the Fano conference, Univ. di Torino, 2004, pp. 175–184.

[7] A. Beauville, *Some remarks on Kähler manifolds with* $c_1 = 0$, in Classification of Algebraic and Analytic Manifolds (Katata, 1982), Progress in Mathematics, Vol. 39, Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 1–26.

[8] A. Beauville, *Variétés Kählériennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Differential Geom. 18 (1983) 755–782.

[9] A. Beauville, *Systèmes hamiltoniens complètement intégrables associés aux surfaces K3* In : Problems in the theory of surfaces and their classification (Cortona, 1988), Sympos. Math. XXXII, Academic. Press. London, 1991, pp. 25–31.

[10] A.Beilinson, J.Bernstein and P.Deligne, *Faisceaux pervers, Astérisque 100(1982), 5-171.*

[11] Beltrametti, M. ; Francia, P. *Conic bundles on nonrational surfaces.* Algebraic geometry–open problems (Ravello, 1982), 34–89, Lecture Notes in Math., 997, Springer, Berlin, 1983.

[12] O.Benoist,*Séparation et propriété de Deligne-Munford des champs de modules d'intersection complètes lisses. J. London Math. Soc. (2013) 87 (1), 138-156*

[13] M.-A. Bertin, *On the singularities of the trisecant surface to a space curve*, (Pragmatic 1997, Catania), Matematiche (Catania) **53** (1998), suppl. (1999), 15–22.

[14] J. Bouali, Quelques algorithmes de calcul pour l'étude de familles de fibrés en coniques de dimension 3 avec dégénérescences par le logiciel Macaulay2, disponible sur le site `http://nagel49.perso.math.cnrs.fr/TheseBouali/Appendice%20I.html`.

[15] V. Chernousov, S. Gille and A. Merkurjev, *Motivic Decomposition of Isotropic Homogeneous Varieties, Duke Math. Journal, 126 (2005), 137-159.*

[16] J. Choy, Y.-H. Kiem, *On the existence of a crepant resolution of some moduli spaces of sheaves on an abelian surface*, Math. Z. **252** (2006), 557–575.

[17] J. Choy, Y.-H. Kiem, *Nonexistence of a crepant resolution of some moduli spaces of sheaves on a K3 surface*, J. Korean Math. Soc. **44** (2007), 35–54.

[18] A.Corti and M.Hanamura, *Motivic decomposition and intersection Chow groups. I,Duke Math. J. 103(2000), 459-522.*

[19] M.A.A.de Cataldo, L. Milgiorini. *The Decomposition Theorem and the topology of algebraic maps, Bulletin of the A.M.S., Vol. 46. N.4 (2009), 535-633.*

[20] C.Deninger and J.P.Murre, *J. P. Motivic decomposition of abelian schemes and Fourier transform, J.reine angew. Math. 422(1991), 201-219.*

[21] R. Donagi, E. Markman, *Spectral covers, algebraically completely integrable Hamiltonian systems, and moduli of bundles*, in M. Francaviglia (ed.), Integrable systems and quantum groups, Lecture Notes in Math. 1620, 1–119, Springer, 1996.

[22] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, Fundamental algebraic geometry. Math. Surveys Monogr. 123, Amer. Math. Soc., 2005.

[23] B. Fu, *A survey on symplectic singularities and symplectic resolutions*, Ann. Math. Blaise Pascal **13** (2006), 209–236.

[24] W.Fulton, *Intersection theory. Second edition. A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.*

[25] W.Fulton, J. Harris *Representation theory. A first course. Grad. A Texts in Math. 129 Springer-Verlag, Berlin, New York, 1991.*

[26] B.B.Gordon, M.Hanamura and J.P.Murre, *Relative Chow-Künneth projection for modular varieties, J. f. die reine u. angew. Math. 558(2003), 1-14.*

[27] D. R. Grayson, M. E. Stillman, *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*, available at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/.

[28] P.Griffiths and J.Harris, *Principles of Algebraic Geometry, Wiley(1978).*

[29] P.Griffiths and J.Harris, *On the Noether-Lefschetz theorem and some remarks on codimension two cycles. Math. Ann. 271, p.31-51(1985).*

[30] L. Gruson and C. Peskine, *Courbes de l'espace projectif : variétés de sécantes*, In : Enumerative geometry and classical algebraic geometry (Nice, 1981), pp. 1–31, Progr. Math., 24, Birkhäuser, 1982.

[31] D. Huybrechts, *Lectures on $K3$ surfaces,* http://www.math.uni-bonn.de/people/huybrech/K3.html.

[32] D. Huybrechts and M. Lehn *The geometry of moduli spaces of sheaves*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 2010.

[33] V. A. Iskovskikh and Yu. G. Prokhorov *Algebraic Geometry V : Fano Varieties*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Spriger-Verlag, 1999.

[34] A. Iliev, L .Manivel *Prime Fano threefold and integrable systems*, Math. Annalen **339** (2007), 937–955.

[35] U.Jannsen, *Motivic sheaves and filtration on Chow groups. In Seattle Conf. on Motives 1991, AMS Proc. Symp. Pure Math 55, AMS Providence, RI(1994), 245-302.*

[36] D. Kaledin, M. Lehn, C. Sorger, *Singular symplectic moduli spaces*, Invent. Math. **164** (2006), 591–614.

[37] N.Karpenko, *Cohomology of relative cellular spaces and isotropic flag varieties, St. Petersburg Math. J. 12 (2001), no. 1, 1-50.*

[38] S-I.Kimura, J.P.Murre, *On natural isomorphisms of finite dimensional motives and applications to Picard motives, in : Proceedings Int. Coll. "Cycles, Motives and Shimura varieties", V. Srinivas (Ed.), Mumbai 2008, Naroshi Publ. House (New Delhi) and AMS (2010)*

[39] B.Köck, *Chow motif and higher Chow theory of G/P*, Manuscripta Math. 70 (1991), 363–372.

[40] K. Kodaira, *On stability of compact submanifolds of complexe manifold*, Amer. J. Math. **85** (1963), 79–94.

[41] P. Le Barz, *Formules multi-sécantes pour les courbes gauches quelconques*, In : Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry, Progress in Math. 24, Birkhäuser, 1982, 165–197.

[42] Sh. Ma, *Rationality of the moduli spaces of 2-elementary K3 surfaces*, J. Algebraic Geom. **24** (2015), 81–158.

[43] D. Markushevich, *An integrable system of K3-Fano flags*, Math. Ann. **342** (2008), 145–156.

[44] D. Markushevich, A. S. Tikhomirov, *New symplectic V-manifolds of dimension four via the relative compactified Prymian*, Internat. J. Math. **18** (2007), 1187–1224.

[45] S. Mori and S. Mukai, *Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$, I.* In : Algebraic and topological theories (Kinosaki, 1984), Tokyo, 1986, pp. 465–545.

[46] S. Mori, S. Mukai, *Classification of Fano 3-folds with* $B_2 \geq 2$, Manuscripta Math. **36** (1981/82), 147–162.

[47] S. Mori and S. Mukai, *Erratum : "Classification of Fano 3-folds with* $B_2 \geq 2$*" [Manuscripta Math. 36 (1981/82), 147–162]*, Manuscripta Math. **110** (2003), 407.

[48] S. Mukai, *Symplectic structure of moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Invent. Math. **77** (1984), 101–116.

[49] S. Mukai, *On the moduli space of bundles on K3 surfaces. I*, Vector bundles on algebraic varieties (Bombay 1984), Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, Vol. 11, 1987, pp. 341–413.

[50] S. Mukai, *Non-abelian Brill-Noether theory and Fano 3-folds*, Sugaku Expositions **14** (2001), 125–153.

[51] S.Müller-Stach and C.Peters, *Transcendental aspects of algebraic cycles. Proceedings of the Summer School held in Grenoble, June 18-July 6, 2001. London Mathematical Society Lecture Note Series, 313. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.*

[52] S.Müller-Stach and M. Saito, *Relative Chow-Kuenneth decompositions for morphisms of threefolds J. f. die reine u. angew. Math. 666(2012), 141-161.*

[53] J.P.Murre, *On the motive of an algebraic surface, Journal f. die reine u. angew. Math. 409 (1990), 190-204.*

[54] J.P.Murre, *On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety I and II, Indag. Mathem. 4(1993), 177-188 and 189-201.*

[55] J.P.Murre, J.Nagel and C.Peters, *Lectures on the Theory of Pure motives. AMS University lecture series 61 2013.*

[56] J.Nagel and M.Saito, *Relative Chow-Künneth decompositions for conic bundles and Prym varieties. Int. Math. Res. Not. IMRN 2009, no. 16, 2978-3001.*

[57] M. S. Narasimhan, S. Ramanan, *Deformations of the moduli space of vector bundles over an algebraic curve*, Ann. Math. (2) **101**, 391–417 (1975).

[58] P. E. Newstead, *Stable bundles of rank* 2 *and odd degree over a curve of genus* 2, Topology **7**, 205–215 (1968).

[59] V. V. Nikulin, *Finite groups of automorphisms of Kählerian K3 surfaces* (Russian), Trudy Moskov. Mat. Obshch. 38 (1979), 75–137 ; English translation : Trans. Moscow Math.Soc. 38 (1980), 71–135.

[60] V. V. Nikulin, *Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces*, Proc. Internat. Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 654–671, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[61] K. G. O'Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3*, J. Reine Angew. Math. **512** (1999), 49–117.

[62] K. G. O'Grady *A new six-dimensional irreductible symplectic variety*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), 435–505.

[63] A.Otwinowska, *Monodromie d'une famille d'hypersurfaces.* Available on : `www.math.u-psud.fr/ ania/`

[64] Yu. G. Prokhorov, *Fano threefolds of genus* 12 *and compactifications of* $\mathbb{C}^3$, St. Petersburg Math. J. **3** (1992), 855–864.

[65] C.Peters and J.Steenbrink, *Mixed Hodge Structures. Volume 52 A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer. (2007)*

[66] J. Le Potier, *Faisceaux semi-stable de dimension 1 sur le plan projectif*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 38(7-8) (1993) 635–678.

[67] M. Reid, *The complete intersection of two or more quadrics*, Trinity College, Cambridqe, 1972.

[68] B. Saint-Donat, *Projective models of K3 surfaces*, Amer. J. Math. **96** (1974) 602–639.

[69] A.J.Scholl *Classical motives. In Seattle Conf. on Motives 1991, AMS Proc. Symp. Pure Math 55, AMS Providence, RI, p 163-187 (1994).*

[70] A.M.Shermenev, *The motive of an abelian variety, Funk. Anal. 8(1974), 47-53.*

[71] V. Shokurov, *Smoothness of a general anticanonical divisor on a Fano variety*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43, 430–441 (1979).

[72] Y. T. Siu, *Every K3 surface is Kähler*, Invent. Math. **73**, 139–150 (1983).

[73] K. Takeuchi, *Some birational maps of Fano 3-folds*, Compositio Math. **71** (1989), 265–283.

[74] T.Terasoma,*Complete intersections of hypersurfaces the Fermat case and the quadric case. Japanese J. Math.14-2 (1988), 329-384.*

[75] B. van Geemen, A. Sarti, *Nikulin involutions on K3 surfaces*, Math. Z. **255** (2007), 731–753.

[76] C.Vial, *Chow-Künneth decomposition for 3- and 4-folds fibred by varieties with trivial Chow group of zero-cycles. J. Algebraic Geom J. Algebraic Geom. 24 (2015) 51-80.*

[77] C.Vial, *Algebraic cycles and fibrations. Documenta Math. 18 (2013) 1521-1553*

[78] C.Vial, *Projectors on the algebraic intermediate jacobians. New York J.Math. 19(2013), 793-822.*

[79] C. Voisin,*Théorie de Hodge et géometrie algebrique complexe*, Cours specialisés 10, SMF, 2002.

[80] S. P. Vorontsov, *Automorphisms of even lattices arising in connection with automorphisms of algebraic K3-surfaces*, Moscow Univ. Math. Bull. **38** (1983), 19–21.